Определение 1. Пусть на плоскости π задана окружность Γ радиуса r с центром O. Для любой точки $A \neq O$ *полярой* точки A называется прямая, перпендикулярная прямой OA, расстояние от которой до точки O равно r^2/OA. Полярой точки O называется бесконечно удалённая прямая проективной плоскости $\bar{\pi}$. Полярой бесконечно удалённой точки $A \in \bar{\pi}$ называется прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная ко всем (конечным) прямым, проходящим через A.

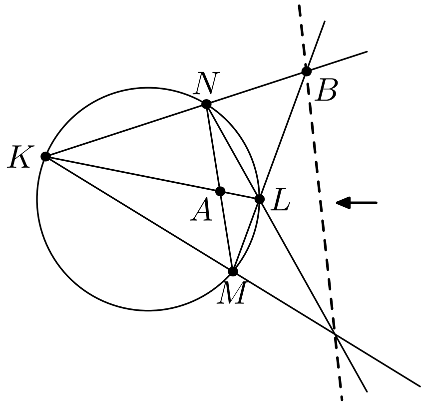
Задача 1. Докажите, что каждая прямая на проективной плоскости является полярой ровно одной точки. (Эта точка называется *полюсом* данной прямой.)

Определение 2. Отображение проективной плоскости в себя, переводящее каждую точку в её поляру и каждую прямую в её полюс, называется *полярным преобразованием.*

Определение 3. Будем говорить, что точка P и прямая l проективной плоскости *инцидентны,* если точка P лежит на прямой l.

Задача 2. Докажите, что полярное преобразование плоскости сохраняет *инцидентность* (то есть, если точка и прямая инцидентны, то их образы при полярном преобразовании также инцидентны).

Задача 3. (*Задача о поляре*) Пусть $A \in (\bar{\pi} \setminus \Gamma)$. Проведём через точку A любые две прямые, одна из которых пресекает окружность Γ в точках K и L, а другая — в точках M и N. Обозначим через B точку пересечения прямых KN и LM. Докажите, что точка B лежит на поляре точки A, причем все точки этой поляры можно получить таким построением.



Задача 4. Докажите, что полярное преобразование сохраняет двойные отношения.

Задача 5. (*Проективная двойственность*) Пусть верная теорема проективной геометрии сформулирована в терминах точек, прямых, инцидентности и двойных отношений. Докажите, что если в формулировке заменить точки на прямые, а прямые на точки, то снова получится верная теорема проективной геометрии.

Задача 6. (*Проективная теорема Менелая*) В какое утверждение переводит проективная двойственность проективную теорему Чевы?

Задача 7. (*Теорема Менелая*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 6, что точки A', B' и C' коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1.$$

(Отношения отрезков берутся со знаком!)

Задача 8. В какое утверждение переводит проективная двойственность теорему Паппа?

Задача 9. В какое утверждение переводит проективная двойственность теорему Дезарга?

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Конические сечения

Определение 4. *Коническим сечением* или *коникой* называется образ окружности под действием проективного преобразования.

Задача 10*. Докажите, что эллипс, гипербола и парабола являются коническими сечениями. (Указание: рассмотрите сечения кругового конуса различными плоскостями).

Задача 11. Докажите, что любая коника — либо эллипс, либо парабола, либо гипербола.

Задача 12. Пусть A, B, C, D — точки на конике Γ, причём $\{A, B\} \cap \{C, D\} = \emptyset$. Докажите, что для любой другой точки $E \in \Gamma$ двойное отношение $[EA, EB, EC, ED]$ одно и то же.

Задача 13. (*Задача о бабочке*) Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P. Отрезок LM пересекает AB в точке Q. Докажите, что $PC = QC$.

Задача 14. (*Теорема Паскаля*) Докажите, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, коллинеарны.

Задача 15. (*Теорема Брианшона*) Докажите, что три диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около конического сечения, конкурентны.

Задача 16. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырёхугольника совпадает с точкой пересечения прямых, соединяющих точки касания противоположных сторон.

Разное

Задача 17. С помощью одной линейки проведите касательную к окружности (центр которой не отмечен) через данную точку,
а) лежащую вне окружности;
б) лежащую на окружности.

Задача 18. Где лежат середины любого семейства параллельных хорд данной параболы?

Задача 19. Дан график **а)** $y = x^2$; **б)** $y = 1/x$; оси координат стёрты. Как восстановить их циркулем и линейкой?

Задача 20. В окружность с центром O вписан четырехугольник, его диагонали пересекаются в точке P, а продолжения противоположных сторон — в точках Q и R. Докажите, что высоты треугольника PQR пересекаются в точке O.

Задача 21. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q, причем отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что
а) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;
б)* углы $\angle BMO$ и $\angle DMO$ равны.

10	11	12	13	14	15	16	17 а	17 б	18	19 а	19 б	20	21 а	21 б