Определение 1. Пусть A, B, C, D — точки на одной прямой l, причём $\{A, B\} \cap \{C, D\} = \emptyset$. Их *двойным отношением* называется

$$[A, B, C, D] = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

где отношение отрезков берется со знаком. Если одна из точек является бесконечно удалённой, то двойное отношение равно *простому* отношению остальных трёх точек, то есть, например, $[A, B, C, \infty] = CA : CB$, и т. п.

Пусть a, b, c, d — прямые в плоскости π, проходящие через (конечную) точку O, причём $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$. Их *двойным отношением* называется

$$[a, b, c, d] = \frac{\sin \angle ca}{\sin \angle cb} : \frac{\sin \angle da}{\sin \angle db},$$

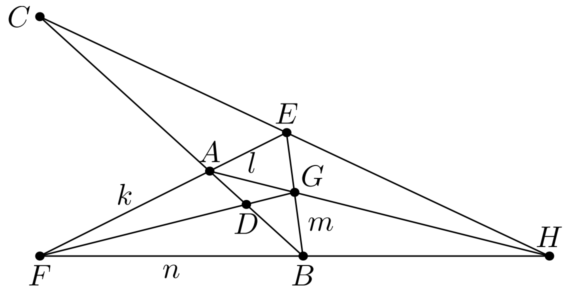
где на каждой прямой выбрано направление и угол между прямыми — это угол, отсчитанный против часовой стрелки от выбранного направления на первой прямой до выбранного направления на второй прямой.

Задача 1. Пусть a, b, c, d — прямые в плоскости π, проходящие через точку O, причём $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, прямая $l \subset \pi$ не проходит через O, а точки A, B, C, D суть точки пересечения прямой l с прямыми a, b, c, d соответственно. Докажите, что $[a, b, c, d] = [A, B, C, D]$.

Задача 2. Докажите, что двойные отношения сохраняются при проективных преобразованиях.

Задача 3. Как меняется двойное отношение $[A, B, C, D]$ при перестановках точек A, B, C, D? Сколько различных значений двойного отношения так получается (для точек в общем положении)?

Задача 4. Пусть на проективной плоскости $\bar{\pi}$ выбраны прямые k, l, m, n, никакие три из которых не конкурентны. Пусть $A = k \cap l$, $B = m \cap n$, $E = k \cap m$, $F = k \cap n$, $G = l \cap m$, $H = l \cap n$, $C = AB \cap EH$, $D = AB \cap FG$. Докажите, что $[A, B, C, D] = -1$ (точки C и D *гармонически сопряжены* относительно отрезка AB).



Задача 5. (*Проективная теорема Чевы*) Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, D и E — любые точки, не принадлежащие прямым AB, AC и BC. Докажите, что

$$[AD, AE, AB, AC] \cdot [BD, BE, BC, BA] \cdot [CD, CE, CA, CB] = 1.$$

Задача 6. (*Теорема Чевы*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 5, что прямые AA', BB' и CC' конкурентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = -1.$$

(Отношения отрезков берутся со знаком!)

Задача 7. (*Теорема Чевы в углах*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 5, что прямые AA', BB' и CC' конкурентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle CAA'} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle BCC'} \cdot \frac{\sin \angle CBB'}{\sin \angle ABB'} = -1.$$

(Углы берутся со знаком!)

Задача 8. Пусть в окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$, причём

$$\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA} = 1.$$

Докажите, что диагонали AD, BE и CF конкурентны.

1	2	3	4	5	6	7	8