Определение 1. Набор векторов $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^m$ называется базисом, если для любого вектора $w \in \mathbb{R}^m$ найдётся единственный набор чисел $\{w^1, \ldots, w^n\}$ (который называется координатами вектора w в этом базисе) такой, что $w = w^1 v_1 + \ldots + w^n v_n$.

Определение 2. *Матрицей* называется произвольная прямоугольная таблица действительных чисел.

Соглашение 1. (*Правило суммирования Эйнштейна*) В физике и механике часто рассматривают различные суммы произведений. Например, если w^i — координаты вектора w в базисе $\{e_i\}$, то $w = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} w^\alpha e_\alpha$. В тех случаях, когда суммирование ведётся по одному нижнему и одному верхнему индексу, знак суммы может быть опущен: пишут просто $w^\alpha e_\alpha$, имея в виду сумму по всем осмысленным значениям параметра α. Таким образом могут быть коротко записаны довольно длинные суммы:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] \text{ — тензор натяжений Максвелла}$$

Координаты вектора $w \in \mathbb{R}^m$ в стандартном базисе $\{e_i\}$ будем обозначать через $w^1, \ldots, w^m$. Будем записывать координаты вектора w матрицей $m \times 1$ (то есть столбцом) его координат:

$$w = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix} = w^1 e_1 + w^2 e_2 + \ldots + w^m e_m = w^\alpha e_\alpha.$$

Задача 1. Докажите, что набор векторов $\{e_1, \ldots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, где $e_i = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$, образует базис $\mathbb{R}^m$. Будем называть его *стандартным.*

Задача 2. **а)** Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — биективное линейное отображение. Докажите, что набор векторов $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$, где $e_{i'} = f(e_i)$, образует базис $\mathbb{R}^m$.

б) Пусть линейное преобразование f переводит базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в базис. Докажите, что оно биективно.

Задача 3. Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — произвольное линейное отображение. Запишем координаты вектора $e_{i'} = f(e_i)$ в столбец: $\begin{pmatrix} c^1_{\mathbf{i}} \\ c^2_{\mathbf{i}} \\ \vdots \\ c^m_{\mathbf{i}} \end{pmatrix}$, а из этих столбцов составим квадратную таблицу $C := \begin{pmatrix} C^1_{\mathbf{1}} & C^1_2 & \cdots & C^1_{\mathbf{m}} \\ C^2_{\mathbf{1}} & C^2_2 & \cdots & C^2_{\mathbf{m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C^m_{\mathbf{1}} & C^m_2 & \cdots & C^m_{\mathbf{m}} \end{pmatrix}$

Эта таблица называется *матрицей преобразования* f в базисе $\{e_i\}$.

Задача 4. Выразите вектор $e_{i'}$ через базисные векторы $\{e_\alpha\}$ и элементы матрицы $\left\{C^p_{\mathbf{q}}\right\}$ в короткой нотации.

Задача 5. **а)** Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$.

б) Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_m\}$.

в) Придумайте привило умножения матрицы C на вектор-столбец координат вектора w так, чтобы работало правило $f(w) = C \cdot w$.

Задача 6. Вычислите: **а)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; **б)** $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; Что это за линейное преобразование?
в) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$; **г)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; **д)** $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$.

Задача 7. Пусть f и g — два биективных линейных отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, а C и D — матрицы преобразований f и g в базисе $\{e_i\}$ соответственно.

а) Найдите координаты $g(f(e_1))$ в базисе $\{e_i\}$. **б)** Найдите координаты $g(f(w))$ в базисе $\{e_i\}$.

в) Придумайте правило умножения матриц так, чтобы для каждого вектора w

$$g(f(w)) = (D \cdot C) \cdot w.$$

Задача 8. Придумайте две матрицы C и D такие, что: **а)** $CD = D$; **б)** $CD = DC$; **в)** $CD \neq DC$.

Задача 9. Постройте биекцию между множеством всех линейных отображений (операторов) $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ и множеством матриц размера m на m.

Задача 10. **а)** Найдите такую матрицу E, что для любой матрицы C верно: $EC = CE = C$.

б) Докажите, что такая матрица единственна.

в) Пусть C — матрица биективного линейного оператора. Докажите, что найдётся матрица D такая, что $CD = DC = E$.

г) Докажите, что множество матриц биективных линейных операторов образуют группу относительно операции умножения.

Задача 11. Придумайте, как описать аффинные преобразования с помощью матриц, векторов, их сложения и умножения.

1	2 а	2 б	3	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	8 в	9	10 а	10 б	10 в	10 г	11