

Пусть перед обществом из  $n$  человек стоит  $l$  альтернатив, и каждый из участников упорядочивает их в соответствии со своими предпочтениями, а по результатам опроса определяется коллективное решение. Это означает, что набору  $P = \{<_1, <_2, \dots, <_n\}$  мнений<sup>1</sup> — строгих линейных порядков на множестве альтернатив  $A$  — сопоставляется нестрогий линейный порядок  $\leq_P$  на  $A$  (альтернативам разрешается быть равнозначными с точки зрения общества).

**Определение 1.** Набор  $<_1, <_2, \dots, <_n$  называется *профилем*, а отображение из множества профилей в множество нестрогих линейных порядков на  $A$  — *функционалом общественного выбора*.

**Определение 2.** Функционал общественного выбора мы будем называть *справедливым*, если он обладает следующими свойствами:

*эффективность по Парето*: если в профиле  $P$  для некоторых альтернатив  $x$  и  $y$   $x <_k y$  для любого участника  $k$ , то  $x \leq_P y$  и не  $y \leq_P x$ ;

*независимость от посторонних альтернатив*: если в профиле  $P$  каждый участник сравнил альтернативы  $x$  и  $y$  так же, как в профиле  $P'$ , то  $x \leq_P y \iff x \leq_{P'} y$ .

**Задача 1.** а) При каких  $l$  правило простого большинства (общество считает, что  $x \leq y$  если и только если хотя бы для половины участников  $x < y$ ) задает функционал общественного выбора? б) Является ли этот функционал эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

**Задача 2.** Пусть в данном профиле альтернатива заняла  $i$ -е по счету место в предпочтениях  $j$ -го участника. Присвоим ей рейтинг — сумму мест в предпочтениях всех участников, и упорядочим альтернативы по возрастанию рейтинга (такой способ формирования коллективного решения называется *правилом Борда*).

а) Задает ли правило Борда функционал общественного выбора?

б) Является ли правило Борда эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

**Задача 3.** а) Придумайте свой способ формирования коллективного решения. При каких  $l$  он является справедливым? б) Зачем в определении справедливого функционала требовать независимость от посторонних альтернатив?

**Задача 4.** Определите, что такое диктаторский функционал. Является ли он эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

**Теорема Эрроу о диктаторе.** Пусть число альтернатив больше двух. Тогда справедливый функционал общественного выбора является диктаторским.

Всюду ниже будем считать, что задан функционал общественного выбора, удовлетворяющий условиям теоремы Эрроу. Будем обозначать  $P_{xy} = \{k : x <_k y\}$ .

**Задача 5.** (*лемма о нейтральности*) Пусть для некоторых альтернатив  $x, y, z$   $P_{xy} = P_{xz}$ , и  $x \leq_P y$ . Тогда  $x \leq_P z$ .

**Задача 6.** (*лемма об экстремальной альтернативе*) Назовем альтернативу  $a$  *экстремальной* в профиле  $P$ , если для каждого участника  $a$  либо лучшая, либо худшая. Докажите, что в коллективном мнении экстремальная альтернатива займет либо первое, либо последнее место.

**Задача 7.** (*доказательство теоремы Эрроу*) Рассмотрим серию профилей, отличающихся друг от друга только мнением участников о некоторой альтернативе  $a$ : в первом профиле все считают  $a$  лучшей альтернативой, во втором профиле участник 1 считает  $a$  худшей, а остальные — лучшей, в третьем профиле участники 1 и 2 считают  $a$  худшей, а остальные — лучшей, и т.д. В последнем,  $(n+1)$ -м профиле все будут считать  $a$  худшей.

а) Исходя из значений функционала на этих профилях, угадайте, кто диктатор.

б) Докажите, что он действительно диктатор.

<sup>1</sup> «меньше» = «хуже»