



**Определение 2.** Пусть на множестве  $\{(x, p) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], p \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$  задана непрерывная ограниченная функция  $f(x, p)$ . Тогда можно определить интеграл с параметром:

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, p) \, dp$$

**Задача 12.** Найти массу квадратной пластины размера  $1 \times 1$ , если её плотность на расстоянии  $x$  и  $y$  от соседних сторон равна  $x^2y + y^2x + x^3 \cos y$ .

**Задача 13.** Найти объём тела, ограниченного поверхностями  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $z = c^2x$ ,  $z = 0$ .

**Задача 14.** Доказать, что объём тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  плоской фигуры, заданной условием  $0 \leq a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq y(x)$ , где  $y(x)$  — непрерывная функция, равен  $V = 2\pi \int_a^b xy(x) dx$ .

**Задача 15.** а) Найти объём шара радиуса  $R$ .

б) Определить центр масс однородного полушария радиуса  $R$ .

в) Найти площадь сферы радиуса  $R$ .

г)\* Найти объём четырёхмерного шара радиуса  $R$  (фигуры, заданной уравнением  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq R^2$ ).

д)\* Найти объём пятимерного шара радиуса  $R$ .

е)\* Найти объём шестимерного шара радиуса  $R$ .

**Задача 16\*.** С какой силой материальная бесконечная прямая постоянной плотности  $\mu_0$  притягивает материальную точку массы  $m$ , находящуюся на расстоянии  $a$  от этой прямой?

**Задача 17\*.** Найти кинетическую энергию цилиндра высоты  $h$  радиуса  $R$  постоянной плотности  $\rho$ , вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ .

**Определение 3.** Функция  $(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$  называется *логарифмической производной* функции  $f$ .

**Задача 18.** Найти все решения дифференциального уравнения  $f'(x) = f(x)$ .

**Задача 19\*.** Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. В начальный момент был 1 кг радия. Найти с точностью до 50 лет время, за которое распадётся 0,999 кг радия, если известно, что через 1600 лет его количество уменьшится в два раза.

**Задача 20\*.** Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен  $\frac{1}{3}$ , и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой  $10 \cdot g \text{ Н}$ ? ( $g$  — ускорение свободного падения) Скорость верёвки считать постоянной. (Указание: Сила трения  $F_{тр} = \mu \cdot N$ ,  $N$  можно найти для куска каната радианной меры  $\Delta\varphi$ , а силу можно выразить как функцию радианной меры угла  $\varphi$ .)

**Задача 21\*\*.** В ванну площади  $1 \text{ м}^2$  со скоростью  $0,25 \text{ л/с}$  течёт вода. В стенке ванной сделано сливное отверстие радиуса  $2,3 \text{ см}$ . Расстояние от края борта до середины отверстия равно  $10 \text{ см}$ . Пренебрегая различием уровня воды внизу и вверху отверстия найти, через какое время зальёт соседей, если вначале вода уже у середины отверстия?

(Напоминание: Согласно закону Торричелли скорость истечения жидкости из сосуда равна  $v = c\sqrt{2gh}$ , где  $g$  — ускорение свободного падения,  $h$  — высота уровня жидкости над отверстием,  $c = 0,6$  — опытный коэффициент.)

12	13	14	15 <sub>a</sub>	15 <sub>b</sub>	15 <sub>B</sub>	15 <sub>Г</sub>	15 <sub>Д</sub>	15 <sub>e</sub>	16	17	18	19	20	21