

Часть 3. Приложения к геометрии

Задача 1. (Замена координат) На плоскости Oxy рассмотрим две непараллельные прямые, задающиеся уравнениями $l_1(x, y) = 0$, $l_2(x, y) = 0$, где l_1 и l_2 — многочлены первой степени. Примем их точку пересечения за новое начало координат O_1 , а сами прямые за новые оси координат: l_1 за ось z , а l_2 за ось t . Тогда прямые l_1 и l_2 будут иметь в новых координатах простые уравнения $t = 0$, $z = 0$ соответственно.

- а) Докажите, что можно так выбрать базисные вектора на осях O_1z , O_1t , что новые координаты (z, t) точки будут вычисляться через ее старые координаты (x, y) по формулам $z = l_2(x, y)$, $t = l_1(x, y)$.
- б) Докажите, что из уравнений $z = l_2(x, y)$, $t = l_1(x, y)$ можно выразить старые координаты x и y через новые z и t .
- в) Пусть $A(x, y)$ — многочлен. Подставив в него вместо x и y их выражения через z и t , получим запись многочлена A в новых координатах z, t . Докажите, что при этом степень многочлена не изменится: $\deg A(x, y) = \deg A(z, t)$.

Задача 2. Докажите, что задаваемая уравнением $z^2 + 2zt + t^2 + \sqrt{2}z - \sqrt{2}t + 1 = 0$ кривая имеет ось симметрии.

Определение 1. Кривую, задающуюся многочленом второй степени, будем называть *коникой*.

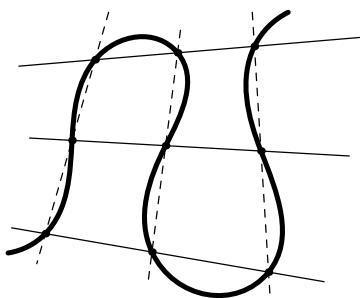
Задача 3. Пусть никакие три из точек A, B, C, D плоскости Oxy не лежат на одной прямой. Пусть прямые AB, BC, CD, DA задаются многочленами первой степени $l_1(x, y), m_1(x, y), l_2(x, y), m_2(x, y)$ соответственно. Докажите, что любую конику, проходящую через точки A, B, C, D , можно задать уравнением вида $\lambda l_1 l_2 + \mu m_1 m_2 = 0$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Задача 4. а) Пусть никакие три из точек A, B, C, D, E на плоскости не лежат на одной прямой. Докажите, что через эти точки проходит ровно одна коника.

6) Докажите, что в пункте а) достаточно потребовать, чтобы никакие четыре из точек A, B, C, D, E не лежали на одной прямой.

Задача 5. В обозначениях задачи 3 выясните, является ли четырехугольник $ABCD$ вписанным в окружность, если

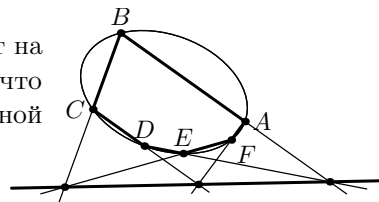
- a) $l_1 = 6x - y + 1$, $m_1 = 3x + 55y - 388$, $l_2 = x - 9$, $m_2 = x + 9y - 9$; б) $l_1 = 4x - 5y - 35$, $m_1 = 7x + 5y + 35$, $l_2 = 83x - 93y + 415$, $m_2 = x + y - 11$.



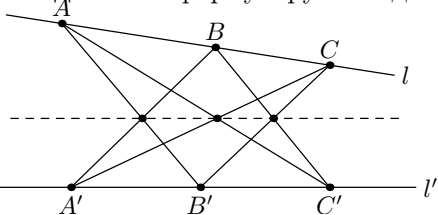
Задача 6. Пусть три красные прямые пересекают три синие прямые в девяти черных точках (на рисунке слева красные прямые изображены сплошными линиями, а синие — пунктирными). Докажите, что если восемь из этих черных точек лежат на некоторой *кубической* кривой (то есть на кривой, задающейся многочленом третьей степени), то и оставшаяся девятая черная точка лежит на той же кубической кривой.

Определение 2. *Шестиугольником* будем называть всякую замкнутую шестизвенную ломаную, никакие три из шести вершин которой не лежат на одной прямой.

Задача 7. (Теорема Паскаля) Пусть вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат на кривой, задаваемой неприводимым многочленом второй степени. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA лежат на одной прямой (смотрите рисунок справа).

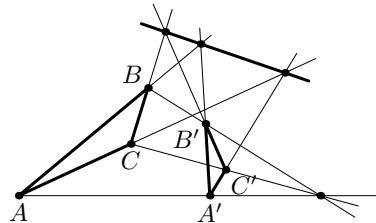


Задача 8. Сформулируйте и докажите теорему, обратную к теореме Паскаля.

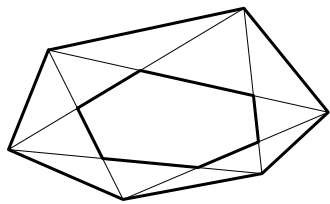


Задача 9. (Теорема Паппа) Пусть точки A, B, C и A', B', C' лежат на прямых l и l' соответственно. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой (см. рис. слева).

Задача 10. (Теорема Дезарга) Пусть никакие три из точек A, B, C, A', B', C' не лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой (см. рис. справа).



Определение 3. Назовем два шестиугольника *сопряженными*, если один из них образован точками пересечения неглавных диагоналей другого. (Например, изображенные на рисунке слева черные шестиугольники сопряжены.) Из определения следует, что для каждого шестиугольника имеется ровно два с ним сопряженных.



Задача 11. (С.А.Дориченко) Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения противоположных сторон сопряженного с ним шестиугольника лежат на одной прямой.

[illegible]