Интеграл Римана

Определение 1. *Разбиением отрезка* $[a, b]$ называется всякий конечный набор точек $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ с условием $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_i - x_{i-1}$ обозначается Δx_i.
Диаметром разбиения σ называется число $\lambda(\sigma) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$.

Определение 2. *Отмеченным разбиением отрезка* $[a, b]$ называется пара (σ, ξ), где $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — набор точек из отрезков разбиения: $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$.

Определение 3. Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$, а (σ, ξ) — отмеченное разбиение этого отрезка. *Интегральной суммой* функции f при отмеченном разбиении (σ, ξ) называется

$$\sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение 4. Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$. *Интегралом Римана* функции f по отрезку $[a, b]$ называется

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(\sigma)\to 0} \sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x,$$

где предел берется по всем отмеченным разбиениям (σ, ξ) отрезка $[a, b]$ при $\lambda(\sigma) \to 0$. Функция f называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$, если этот предел (то есть интеграл) существует. Обозначение: $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Задача 1. Дайте четкое определение (в терминах ε и δ) того, что число I является пределом интегральных сумм $\sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x$ при $\lambda(\sigma) \to 0$.

Задача 2. Интегрируемы ли на отрезке $[0, 1]$ функции: **а)** $f(x) = 1$; **б)** $f(x) = x$; **в)** $f(x) = x^{-1}$?

Задача 3. Докажите, что любая интегрируемая функция на отрезке $[a, b]$ ограничена на нем.

Задача 4. Докажите, что если изменить значение функции в конечном числе точек, то ее интегрируемость на отрезке $[a, b]$ и значение интеграла не изменятся.

Задача 5. Докажите *критерий Коши* интегрируемости: функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух отмеченных разбиений (σ, ξ) и (σ', ξ') таких, что $\lambda(\sigma) < \delta$ и $\lambda(\sigma') < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x - \sum_{(\sigma',\xi')} f\Delta x \right| < \varepsilon.$$

Интеграл Дарбу

Определение 5. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, f — функция, ограниченная на этом отрезке. Положим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Числа $s_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ и $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу* функции f при разбиении σ.

Задача 6. Объясните геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу и «нарисуйте» их
а) для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 4\}$;
б) для функции $f(x) = (x - 1)^2$ на отрезке $[0, 2]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 8\}$.

Задача 7. Можно ли исключить из определения 5 условие ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$?

Задача 8. Найдите нижние и верхние суммы Дарбу при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{n} \mid i = 0, \ldots, n\}$ отрезка $[0, 1]$ функций **а)** $f(x) = x$; **б)** $f(x) = x^2$; **в)** $f(x) = \sin \pi n x$.

Задача 9. Что происходит с суммами Дарбу при добавлении к разбиению новых точек?

Задача 10. Докажите: любая верхняя сумма Дарбу функции не меньше любой её нижней суммы Дарбу.

Задача 11. Докажите, что для любой ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f существуют $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка. Сравните I_* и I^*. Эти числа называются *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$.

Задача 12. Найдите I_* и I^* для
а) $f(x) = x$ на $[0, 1]$; **б)** $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$; **в)** функции Дирихле на отрезке $[a, b]$.

Задача 13. Докажите, что функция f интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке, и $I_* = I^*$. При этом $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$.

Задача 14. Верно ли, что всякая ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

Задача 15. Докажите, что функция, монотонная на некотором отрезке, интегрируема на нём.

Задача 16. **а)** Докажите, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.
б) Верно ли, что если интеграл функции равен нулю, то и сама функция тождественно равна нулю?
в) А если эта функция неотрицательна? **г)** А если эта функция неотрицательна и непрерывна?
д)* Верно ли, что интеграл от строго положительной функции строго больше нуля?

Задача 17. Пусть $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Докажите, что $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ и выполнено равенство

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 18. Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $c \in \mathbb{R}$. Докажите, что $cf \in \mathcal{R}([a, b])$ и выполнено равенство

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Задача 19. Пусть $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ и при любом $x \in [a, b]$ выполнено $f(x) \leqslant g(x)$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 20. Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$ и для любого $x \in [a, b]$ выполнено $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Докажите, что

$$m(b - a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a).$$

Задача 21. **а)** Докажите, что $I_* = I^* \iff \inf_\sigma(S_\sigma - s_\sigma) = 0$.
б) Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Докажите, что $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ и выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Задача 22. Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$ и $[c, d] \subset [a, b]$. Докажите, что $f \in \mathcal{R}([c, d])$.

Задача 23. Пусть $a < b < c$. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, то она интегрируема и на $[a, c]$, причём

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Задача 24. Докажите, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.
Указание: непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём (см. листок 24).

Задача 25. Докажите интегрируемость на отрезке
а) ограниченной функции с конечным числом точек разрыва на этом отрезке;
б)* ограниченной функции со счётным числом точек разрыва на этом отрезке.

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	8 в	9	10	11	12 а	12 б	12 в	13	14	15	16 а	16 б	16 в	16 г	16 д	17	18	19	20	21 а	21 б	22	23	24	25 а	25 б