

**Задача.** Исследовать функцию  $y = f(x)$  и построить её график.

1. Укажите естественную область определения функции, если область определения не задана.
2. На черновике набросайте приблизительный график функции для того, чтобы лучше понимать, о чём речь. После каждого пункта отмечайте на графике разрывы, экстремумы, нули и т.д. При необходимости обновите набросок графика.
3. Укажите множество значений (скорее всего, она будет известна после нахождения экстремумов).
4. Выясните наличие симметрий у графика (чётность, нечётность функции). Выясните, периодична ли данная функция, и, если это возможно, найдите её минимальный положительный период.
5. Найдите нули функции и точки разрыва (если они есть).
6. Найдите промежутки знакопостоянства функции (обычно, методом интервалов). Результат — таблица ( $a_1, a_2$  — нули функции или точки, где  $f(x)$  не определена или разрывна):

	$(-\infty, a_1)$	$a_1$	$(a_1, a_2)$	$a_2$	$(a_2, +\infty)$
$f(x)$	+	0	+	0	—

7. Изучите поведение функции в граничных точках области определения, в окрестности точек разрыва и на бесконечности.
8. Найдите все асимптоты. Найдите точку пересечения графика с наклонной асимптотой.
9. Найдите производную функцию  $f'(x)$  в тех точках, где она существует, критические точки, и исследуйте функцию на монотонность и экстремумы с помощью первой производной. Результат — таблица ( $b_1, b_2$  — точки, в которых производная равна нулю или не определена):

	$(-\infty, b_1)$	$b_1$	$(b_1, b_2)$	$b_2$	$(b_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	—
$f(x)$	$\nearrow$	$f(b_1)$	$\nearrow$	$f(b_2)$	$\searrow$
		—		максимум	

10. Найдите вторую производную  $f''(x)$  в тех точках, где она существует, и исследуйте функцию на выпуклость и точки перегиба с помощью второй производной. Результат — таблица ( $c_1, c_2$  — точки, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не определена):

	$(-\infty, c_1)$	$c_1$	$(c_1, c_2)$	$c_2$	$(c_2, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	+	0	—
$f'(x)$		$f'(c_1)$		$f'(c_2)$	
$f(x)$	$\cup$	$f(c_1)$	$\cup$	$f(c_2)$	$\cap$
		—		т.перегиба	

11. Сделайте крупный эскиз графика функции, отметив на нём характерные особенности графика (см. пп. 1–10) и некоторые контрольные значения, в частности точку пересечения с осью ординат, и, если это возможно, точки пересечения с осью абсцисс.

**Задача 1.** Постройте (с полным исследованием) графики следующих функций:

а)  $x + \frac{1}{x}$ ; б)  $\frac{x+3}{2-x}$ ; в)  $\sqrt{x(1+x)}$ ; г)  $x \arctg x$ ; д)  $\frac{x}{(x+1)^2}$ ; е)  $\sqrt[3]{9-x^3}$ ; ж)  $\frac{x^3}{1-x^2}$ ; з)\*  $\frac{\cos x}{\cos 2x}$ .

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	1 ж	1 з