

**Определение 1.** Говорят, что последовательность  $(x_n)$  точек метрического пространства  $(M, d)$  *сходится* к  $a \in M$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $N \in \mathbb{N}$  такой, что если  $n > N$ , то  $d(x_n, a) < \varepsilon$ .

**Задача 1.** Докажите, что последовательность в метрическом пространстве не может иметь двух различных пределов.

**Задача 2.** Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Верно ли, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(a, b)$ ?

**Задача 3.** Докажите, что если последовательность сходится и предел её лежит внутри некоторого открытого шара, то почти все её члены лежат внутри этого шара.

**Задача 4.** (*Сходимость в  $\mathbb{R}^m$* ) Рассмотрим арифметическое  $m$ -мерное пространство  $\mathbb{R}^m$  с евклидовой метрикой. Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  если и только если  $\forall 1 \leq i \leq m: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)} = a^{(i)}$  (под  $\alpha^{(i)}$  подразумевается  $i$ -ая координата точки  $\alpha$ ).

**Задача 5.** Какие последовательности являются сходящимися в  
а) дискретной метрике; б)  $p$ -адической метрике?

**Задача 6.** Рассмотрим пространство  $M$  ограниченных на отрезке  $[a, b]$  функций с равномерной метрикой.  
а) Докажите, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = g$ , то для всех  $x \in [a, b]$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ . б) Верно ли обратное?

**Определение 2.** Последовательность  $(x_n)$  точек метрического пространства  $(M, d)$  называется *фундаментальной*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $N \in \mathbb{N}$  такой, что если  $m, n > N$ , то  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

**Задача 7.** а) Докажите, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.  
б) Верно ли обратное?

**Определение 3.** Метрическое пространство  $(M, d)$  называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

**Задача 8.** Докажите, что вещественная прямая с естественной метрикой полна.

**Задача 9.** Докажите, что пространство  $C([a, b])$  с равномерной метрикой является полным.

**Определение 4.** Отображение  $f: M \rightarrow M$  из метрического пространства  $M$  в себя называется *сжимающим*, если найдётся такая константа  $0 < \theta < 1$ , что для любых  $x, y \in M$ :  $d(f(x), f(y)) < \theta d(x, y)$ .

**Задача 10.** При каких условиях гомотетия на плоскости является сжимающим отображением?

**Задача 11.** а) Докажите, что сжимающее отображение  $f$  полного метрического пространства  $M$  имеет неподвижную точку, то есть  $\exists x \in M: f(x) = x$ . б) Верно ли это без условия полноты  $M$ ?  
(Подсказка к пункту а:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$  — неподвижная точка)

**Задача 12.** Докажите, что композиция гомотетии с коэффициентом, не равным  $\pm 1$  и любого движения имеет неподвижную точку.

**Задача 13.** (*Метод Ньютона*) Пусть функция  $\alpha(x)$  дважды непрерывно дифференцируема (то есть вторая производная непрерывна) на отрезке  $[a, b]$ , имеет на нём корень  $\tilde{x}$ , причём  $\alpha'(x) \neq 0$  всюду на  $[a, b]$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = x - \frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}$ .

а) Докажите, что  $\alpha(\tilde{x}) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ ;  
б) Докажите, что  $f$  и  $f'$  непрерывны;  
в) Докажите, что найдётся такое  $\delta > 0$ , что  $f$  на  $U_\delta(\tilde{x})$  осуществляет сжимающее отображение.  
г) Что всё это значит и как это применять?  
д) Найдите  $\sqrt{2}$  с точностью до трёх знаков после запятой.

<listok number = '10д-MS2' description='Метрические пространства: сходящиеся последовательности'  
 re='1' date='05.2016 r'>

&lt;/listok&gt;

[illegible]