

[illegible]

Задача 15. а) Докажите, что замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно.

б) Верно ли, что замкнутое нигде не плотное множество имеет меру ноль?

Определение 5. Множество M называется *всюду плотным* в множестве A , если $A \subset \overline{M}$. Если множество M всюду плотно на прямой (то есть $\overline{M} = \mathbb{R}$), то обычно про него просто говорят, что оно *всюду плотно*.

Задача 16. Являются ли следующие множества всюду плотными:

а) множество всевозможных несократимых дробей, в записи числителя и знаменателя которых не участвует девятка; б) множество конечных десятичных дробей; в) $[0, 1] \setminus X$ в отрезке $[0, 1]$ (см. задачу 12)?

Задача 17. а) Верно ли, что дополнение всюду плотного множества нигде не плотно?

б) Верно ли, что дополнение нигде не плотного множества всюду плотно?

в) Докажите, что дополнение всюду плотного открытого множества нигде не плотно.

Задача 18. а) Докажите, что если множество не является нигде не плотным, то оно всюду плотно в некотором интервале. б) Что значит, что множество не является всюду плотным?

Задача 19. Пусть α — действительное число. Рассмотрим множество D_α всех дробных частей $\{n\alpha\}$ для всевозможных целых n . Пусть α иррационально.

а) Докажите, что 0 — предельная точка этого множества.

б) Докажите, что D_α всюду плотно на отрезке $[0, 1]$.

в) Что можно сказать про D_α , если α рационально?

Задача 20. Разделим окружность длины 1 на произвольные m дуг и занумеруем их числами от 1 до m . Фиксируем иррациональное число a и отметим на окружности все точки вида $n\alpha$ радиан (отсчитывая от какой-то начальной точки против часовой стрелки), где угол α соответствует дуге длины a . Составим бесконечную последовательность ν из чисел от 1 до m : если точка $n\alpha$ попала внутрь дуги с номером k , то запишем на n -м месте последовательности число k ¹.

а) Докажите, что все числа от 1 до m встречаются в этой последовательности бесконечно много раз.

б) Пусть где-то в последовательности ν встретился конечный отрезок $\overline{a_1 \dots a_k}$ из чисел от 1 до m . Докажите тогда, что найдётся такое натуральное l , что среди любых l подряд идущих чисел из последовательности ν найдутся k подряд идущих, составляющие $\overline{a_1 \dots a_k}$ (последовательности с таким свойством называются *почти периодическими*).

в) Будет ли последовательность ν периодической?

Задача 21. а) Докажите, что 2^n начинается с цифры 7 тогда и только тогда, когда $\lg 7 \leq \{n \lg 2\} < \lg 8$.

б) Докажите, что для любой конечной последовательности цифр $\overline{a_1 \dots a_k}$, где $a_1 \neq 0$, найдётся натуральная степень двойки, начинающаяся с этой последовательности цифр.

Задача 22. Рассматривается последовательность, n -й член которой есть первая цифра числа 2^n .

а) Докажите, что эта последовательность почти периодическая (см. задачу 20). Является ли она периодической? б) Найдите количество различных «слов» длины 13 (наборов из 13 подряд идущих цифр) в этой последовательности.

Задача 23. а) Возьмём отрезок $[0, 1]$ и будем действовать так же, как и при построении множества K , но только делить на пять равных частей (а не на три) и выкидывать вторую и четвёртую. Исследуйте свойства получившегося множества. А если делить на восемь равных частей и выкидывать вторую, третью и шестую?

б) Опять возьмём отрезок $[0, 1]$ и будем с ним поступать так же, как при построении множества K , но только на n -м шаге будем из каждого оставшегося отрезка вырезать в середине интервал длины $\frac{1}{n}$ от его длины (а не $\frac{1}{3}$). Исследуйте свойства получившегося множества.

Задача 24. (И. М. Гельфанд) а) На плоскости из начала координат в каждом направлении выпустили по некоторому отрезку. Пусть M — объединение этих отрезков. Известно, что M — замкнутое множество. Докажите, что оно имеет непустую внутренность (непустое множество внутренних точек).

б) Обязательно ли в M найдётся круг с центром в начале координат?

Задача 25. Докажите, что у счётного замкнутого множества всегда найдётся изолированная точка.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 19 | 20 | 20 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 25 |
| а | б | а | б | в | а | б | в | а | б | а | б | в | а | б | в | а | б | а | б | а | б | а | б | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

¹Точка $n\alpha$ может попасть на границу между соседними дугами, но не более одного раза для каждой такой границы, так как α иррационально. Поэтому в этом случае будем рассматривать последовательность начиная с того места, после которого $n\alpha$ на границы дуг уже не попадает.