Листок №$26\frac{1}{2}$ **Множества на прямой. Открытые и замкнутые множества** 12.2015

Определение 1. *Окрестностью* точки называется произвольный содержащий её интервал (всюду в этом листке под интервалами понимаются в том числе и бесконечные: открытые лучи и вся прямая). Точка называется *внутренней точкой* множества M, если она содержится в M вместе с некоторой своей окрестностью.

Задача 1. Найдётся ли множество, у которого **а)** нет внутренних точек; **б)** ровно одна внутренняя точка?

Определение 2. Множество называется *открытым*, если каждая его точка внутренняя.

Задача 2. **а)** Докажите, что интервал — открытое множество. **б)** Бывают ли счётные открытые множества?

Определение 3. Точка называется *предельной точкой* множества M, если в любой её окрестности содержится бесконечное количество точек из M. Точка называется *изолированной точкой* множества M, если она принадлежит M и не является для него предельной.

Задача 3. Найдите все предельные точки **а)** $\mathbb{Z}$; **б)** $(0,1)$; **в)** $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$; **г)** $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$; **д)** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **е)** $\mathbb{Q}$; **ж)** $\{\frac{m}{2^n} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$; **з)** бесконечных десятичных дробей, в записи которых только 0 и 1; **и)** $\{\sin n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 4. Может ли **а)** $\mathbb{N}$; **б)** $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ быть множеством предельных точек какого-нибудь множества?

Задача 5. Верно ли, что точная верхняя грань ограниченного множества является его предельной точкой?

Задача 6. Верно ли, что точка x предельная для множества M тогда и только тогда, когда в любой окрестности x содержится **а)** хотя бы одна точка множества M? **б)** хотя бы две точки множества M?

Определение 4. a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если $\forall \varepsilon > 0 \; \forall n \; \exists m > n \; |x_m - a| < \varepsilon$.

Задача 7. **а)** Верно ли, что a является предельной точкой (x_n), если a является предельной точкой множества $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$? Верно ли обратное? **б)** Докажите, что ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда у неё существует и единственна предельная точка.

Задача 8. **а)** Выкинем из множества все изолированные точки. Может ли так оказаться, что мы ничего не выкинули? Выкинули всё? **б)** С полученным множеством повторим ту же самую операцию. И так далее: из получающегося после каждого шага множества будем выкидывать все изолированные точки. Допустим, каждый раз из множества действительно что-то выкидывают. Может ли это продолжаться бесконечно долго?

Определение 5. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 9. **а)** Существуют ли множества, не являющиеся ни замкнутыми, ни открытыми?
б) Всегда ли дополнение замкнутого множества открыто? Всегда ли дополнение открытого множества замкнуто? (*Дополнением* множества A называется разность $\mathbb{R} \setminus A$. Обозначения: $\overline{A}$.)

Задача 10. **а)** Докажите, что конечное пересечение (то есть пересечение конечного числа) и произвольное объединение (то есть объединение произвольного количества) открытых множеств открыто.
б) Докажите, что конечное объединение и произвольное пересечение замкнутых множеств замкнуто.

Задача 11. Найдите все множества, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми.

Задача 12. **а)** Докажите, что всякое открытое множество можно представить в виде объединения не более чем счётного числа попарно непересекающихся интервалов. **б)** Единственно ли такое представление?

Задача 13. **а)** Можно ли представить интервал в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств? **б)** А отрезок в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых множеств?
в) Можно ли представить прямую в виде объединения попарно непересекающихся отрезков?

Задача 14. Докажите, что **а)** у любого бесконечного ограниченного множества есть хотя бы одна предельная точка; **б)** из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Задача 15. (*Компактность отрезка*) Отрезок покрыт произвольной системой открытых множеств. Докажите, что в этой системе можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую отрезок.

Задача 16. Останутся ли верными утверждения предыдущей задачи, если заменить отрезок на интервал?

Определение 6. Непустое множество M называется *компактом*, если из произвольного покрытия M открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 17. Докажите, что **а)** компакты на прямой — это в точности непустые замкнутые ограниченные множества; **б)** у любой последовательности вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ пересечение непусто.

Задача 18. Пусть $D \subset \mathbb{R}$. Математики Банах и Мазур играют в бесконечную игру. Они по очереди выбирают отрезки на прямой, так чтобы каждый следующий содержался внутри предыдущего. Если в пересечении полученной последовательности вложенных отрезков будет точка из множества D, то выиграл Банах, иначе Мазур. Кто выиграет при правильной игре, если D **а)** конечно; **б)** счётно; **в)** открыто; **г)** замкнуто?

1 а	1 б	2 а	2 б	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	3 ж	3 з	3 и	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7 а	7 б	8 а	8 б	9 а	9 б	10 а	10 б	11	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в	14 а	14 б	15	16	17 а	17 б	18 а	18 б	18 в	18 г