Листок №26 Непрерывность: основные определения и теоремы 12.2015

Определение 1. (Непрерывность по Коши́.) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in M$, если если для любой окрестности $\mathcal{V}$ точки $f(a)$ найдется такая окрестность $\mathcal{W}$ точки a, что при всех x из $\mathcal{W} \cap M$ число $f(x)$ лежит в $\mathcal{V}$. Обозначение: $f \in C(a)$.
Аналогично можно дать определение непрерывности *по Гейне* (сделайте это!).
Если f непрерывна в каждой точке $a \in M$, то говорят, что f *непрерывна на* M, и пишут $f \in C(M)$.

Задача 1. Запишите без отрицаний: «$f : M \to \mathbb{R}$ *разрывна* (не является непрерывной) в точке $a \in M$».

Задача 2. В каких точках непрерывны функции: **а)** x; **б)** $\operatorname{sgn} x$; **в)** x^2; **г)** $\{x\}$; **д)** $\frac{1}{x}$; **е)** $\sqrt{x}$.
(Как обычно, функцию, заданную формулой, мы считаем определённой всюду, где эта формула имеет смысл.)

Определение 2. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что $f : M \to \mathbb{R}$ *ограничена на* M, если найдётся такое число k, что $|f(x)| < k$ при всех $x \in M$.

Задача 3. Будет ли функция, непрерывная в точке a, ограниченной на некоторой окрестности точки a?

Задача 4. Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$, причём $f(a) > 0$. Докажите, что существует такая окрестность U точки a, что f положительна на множестве $U \cap M$.

Задача 5. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки a. Докажите, что f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Задача 6. Пусть $f, g \in C(a)$. Докажите, что: **а)** $|f| \in C(a)$; **б)** $f \pm g \in C(a)$; **в)** $f \cdot g \in C(a)$; **г)** если $g(a) \neq 0$, то функция f/g непрерывна в точке a.

Задача 7. Докажите непрерывность функции (на её области определения): **а)** x^n, где $n \in \mathbb{N}$; **б)** многочлен из $\mathbb{R}[x]$; **в)** $P(x)/Q(x)$, где $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq 0$; **г)** $\sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$; **д)** $\sin x$; **е)** $\cos x$; **ж)** $\operatorname{tg} x$.

Задача 8. Придумайте определённую на $\mathbb{R}$ функцию f, множество точек разрыва которой есть
а) $\mathbb{R}$; **б)** $\mathbb{R}$ без одной точки; **в)** $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; **г)*** $\mathbb{Q}$.

***

Задача 9. **а)** Пусть $f \in C([a;b])$, причём $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Найдётся ли такое $\gamma \in (a, b)$, что $f(\gamma) = 0$? **б)** (Теорема о промежуточном значении). Пусть $f \in C([a;b])$, причём $f(a) < f(b)$. Докажите, что для любого $k \in [f(a), f(b)]$ найдётся такая точка $\gamma \in [a, b]$, что $f(\gamma) = k$.

Задача 10. Докажите: любой многочлен нечётной степени из $\mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один корень из $\mathbb{R}$.

Задача 11. (Теорема Л. Бра́уэра о неподвижной точке для отрезка). Пусть $f \in C([0;1])$ и все значения функции f содержатся в отрезке $[0;1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

Задача 12. Функция непрерывна на отрезке I. Всегда ли она **а)** ограничена на I; **б)** достигает своего наибольшего и наименьшего значений на I? **в)** Та же задача, если I — интервал или прямая. **г)** Каким может быть множество значений непрерывной функции на отрезке; интервале; прямой?

Задача 13. Пусть I — *промежуток*, то есть отрезок, интервал, полуинтервал, луч или вся прямая. Функция f непрерывна на $I \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что f обратима на I если и только если f строго монотонна на I. Докажите, что при этом f^{-1} строго монотонна и непрерывна (на $[\min\limits_{x \in I} f(x); \max\limits_{x \in I} f(x)]$).

Задача 14. Докажите непрерывность $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ (на их области определения).

Задача 15. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}$, и функции $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ непрерывны. Докажите, что $g \circ f \in C(A)$.

Задача 16. Пусть $f, g \in C(\mathbb{R})$, причём $f(x) = g(x)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $f = g$.

Задача 17. Найдите все $f \in C(\mathbb{R})$, такие что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Равномерная непрерывность

Определение 3. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной на* M, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in M$, таких что $|x - y| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 18. Функция f равномерно непрерывна на $M \subseteq \mathbb{R}$. Обязательно ли тогда f непрерывна на M?

Задача 19. Какие из функций x^2, $\sqrt{x}$, $1/x$ равномерно непрерывны **а)** на $[1; \infty)$; **б)** на $(0; 1)$? **в)** (Теорема Ка́нтора). Докажите: непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём.

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	3	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж	8 а	8 б	8 в	8 г	9 а	9 б	10	11	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15	16	17	18	19 а	19 б	19 в