

Обозначения:  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  или  $f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a$  (« $f(x)$  стремится к  $b$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ »).

**Задача 2.** Дайте определение того, что функция  $f$  не имеет предела в точке  $a$ .

**Задача 3.** Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

**Задача 4.** Найдите следующие пределы (если они существуют):  
**а)**  $\lim_{x \rightarrow 1} \{x\}$ ; **б)**  $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ ; **в)**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x - 3}$ ; **г)**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ ; **д)**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ ; **е)\***  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$ .

**Задача 6.** Найдите пределы (если они существуют) при  $x \rightarrow +\infty$  функций из задачи 4, а)–д).

**Задача 8.** Найдите пределы при  $x \rightarrow \pm\infty$  функции  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x), Q(x)$  — многочлены.

**Задача 10.** Докажите неравенства: а)  $\sin x < x$  при  $x > 0$ ; б)  $x < \operatorname{tg} x$  при  $0 < x < \pi/2$ .

**Задача 12.** Найдите: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{x}$ .

**Задача 14.** Докажите, что: а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ;

**Задача 16.** Определите предел слева (справа) функции  $f$  в точке  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ).

**Задача 18.** Докажите, что функция, монотонная на некотором интервале, имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

**Задача 20\*.** Может ли функция, определенная на  $\mathbb{R}$ , иметь в каждой точке бесконечный предел?

[illegible]

```
<?xml version='1.0'?>
<listok number = '24' description='Предел функции' type='1' date='10.2015'>
  <problem group='1' type='0'>1a</problem>
  <problem group='1' type='0'>1б</problem>
  <problem group='1' type='0'>1в</problem>
  <problem group='2' type='0'>2</problem>
  <problem group='3' type='0'>3</problem>
  <problem group='4' type='0'>4a</problem>
  <problem group='4' type='0'>4б</problem>
  <problem group='4' type='0'>4в</problem>
  <problem group='4' type='0'>4г</problem>
  <problem group='4' type='0'>4д</problem>
  <problem group='4' type='1'>4е</problem>
  <problem group='5' type='0'>5a</problem>
  <problem group='5' type='0'>5б</problem>
  <problem group='6' type='0'>6</problem>
  <problem group='7' type='0'>7a</problem>
  <problem group='7' type='0'>7б</problem>
  <problem group='8' type='0'>8</problem>
  <problem group='9' type='0'>9a</problem>
  <problem group='9' type='0'>9б</problem>
  <problem group='10' type='0'>10a</problem>
  <problem group='10' type='0'>10б</problem>
  <problem group='11' type='0'>11</problem>
  <problem group='12' type='0'>12a</problem>
  <problem group='12' type='0'>12б</problem>
  <problem group='12' type='0'>12в</problem>
  <problem group='12' type='0'>12г</problem>
  <problem group='12' type='0'>12д</problem>
  <problem group='13' type='0'>13a</problem>
  <problem group='13' type='0'>13б</problem>
  <problem group='13' type='1'>13в</problem>
  <problem group='14' type='0'>14a</problem>
  <problem group='14' type='0'>14б</problem>
  <problem group='15' type='0'>15</problem>
  <problem group='16' type='0'>16</problem>
  <problem group='17' type='0'>17a</problem>
  <problem group='17' type='0'>17б</problem>
  <problem group='17' type='0'>17в</problem>
  <problem group='18' type='0'>18</problem>
  <problem group='19' type='1'>19</problem>
  <problem group='20' type='1'>20</problem>
</listok>
```