## Корни многочленов

**Задача 1.** Докажите, что если многочлен $A(x)$ с целыми коэффициентами принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, то уравнение $A(x) = 0$ не имеет целых решений.

**Задача 2.** **а)** Ненулевая несократимая дробь $p/q$ — корень многочлена $A(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда $a_n$ делится на $q$ и $a_0$ делится на $p$.
**б)** Пусть в пункте а) дано $a_n = 1$. Докажите, что все рациональные корни $A$ — целые числа.

**Задача 3.** Найдите все рациональные корни многочленов:
**а)** $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$; **б)** $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

**Задача 4.** Пусть $A(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $A(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $A(-\sqrt{2}) = 0$.

**Задача 5.** **а)** Найдите ненулевой многочлен $P$ с целыми коэффициентами и корнем $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
**б)** Найдите все корни многочлена $P$ из пункта а).

**Задача 6.** Найдите многочлен минимальной степени из $\mathbb{R}[x]$, для которого $3 - i$, $2$ и $1 + i$ — корни.

## Теорема Виета

**Задача 7.** **а)** Пусть многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ раскладывается на *линейные* множители (то есть многочлены первой степени): $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$. Докажите, что справедливы *формулы Виета:*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = b, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c.$$

**б)*** Найдите подобные формулы, если $\deg P = n$ и $P$ раскладывается на линейные множители.

**Задача 8.** **а)** Пусть $a + b + c > 0$, $ab + bc + ac > 0$, $abc > 0$. Докажите, что $a, b$ и $c$ положительны.
**б)** Пусть $a + b + c < 0$, $ab + bc + ac < 0$, $abc < 0$. Какие знаки могут иметь числа $a, b, c$?

**Задача 9*.** **а)** Пусть число $c \neq 0$. Докажите, что многочлен $x^5 + ax^2 + bx + c$ не может раскладываться на пять линейных множителей. **б)** Та же задача для многочлена $x^5 + ax^4 + bx^3 + c$.

**Задача 10.** **а)** Коэффициенты многочлена $(x - a)(x - b)$ целые. Докажите, что $a^n + b^n$ целое при $n \in \mathbb{N}$. **б)*** Найдите первые $n$ цифр после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{26} + 5)^n$.

## Дополнительные задачи

**Задача 11.** Коэффициенты многочленов $P$ и $Q$ целые. Коэффициенты их произведения делятся на 5. Докажите, что либо коэффициенты $P$, либо коэффициенты $Q$ делятся на 5.

**Задача 12.** Пусть $P$ — многочлен степени $k$ из $\mathbb{C}[x]$ и $n > k$. Докажите, что среднее арифметическое значений $P$ в вершинах правильного $n$-угольника равно значению $P$ в центре $n$-угольника.

**Задача 13.** На графике многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то у них одинаковые ординаты.

**Задача 14.** Даны многочлены положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают?

**Задача 15.** При каких $n$ многочлен степени $n$ с нечётными коэффициентами может иметь $n$ нечётных корней?

**Задача 16.** Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых $x$ принимает целые значения. Верно ли, что среди его коэффициентов **а)** хотя бы один — целое число; **б)** все — целые числа?

**Задача 17.** Докажите, что для любого числового многочлена $P(x)$ степени $n$, принимающего при всех целых $x$ целые значения, существуют такие целые числа $b_0, b_1, \dots, b_n$, что

$$P(x) = b_nC_x^n + b_{n-1}C_x^{n-1} + ... + b_1C_x^1 + b_0, \quad \text{где} \quad C_x^i = \frac{x(x-1)...(x-i+1)}{i!}.$$

**Задача 18.** Многочлен $P(x)$ степени $n - 1$ принимает целые значения при $n$ последовательных целых значениях $x$. Докажите, что $P(x) \in Q[x]$ и $P(n) \in \mathbb{N}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

<?xml version=’1.0’?>
<listok number = ’23’ description=’Многочлены.’ type=’1’ date=’09.2015’>
<problem group=’1’ type=’0’>1</problem>
<problem group=’2’ type=’0’>2а</problem>
<problem group=’2’ type=’0’>2б</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3а</problem>
<problem group=’3’ type=’0’>3б</problem>
<problem group=’4’ type=’0’>4</problem>
<problem group=’5’ type=’0’>5а</problem>
<problem group=’5’ type=’0’>5б</problem>
<problem group=’6’ type=’0’>6</problem>
<problem group=’7’ type=’0’>7а</problem>
<problem group=’7’ type=’1’>7б</problem>
<problem group=’8’ type=’0’>8а</problem>
<problem group=’8’ type=’0’>8б</problem>
<problem group=’9’ type=’1’>9а</problem>
<problem group=’9’ type=’1’>9б</problem>
<problem group=’10’ type=’0’>10а</problem>
<problem group=’10’ type=’1’>10б</problem>
<problem group=’11’ type=’0’>11</problem>
<problem group=’12’ type=’0’>12</problem>
<problem group=’13’ type=’0’>13</problem>
<problem group=’14’ type=’0’>14</problem>
<problem group=’15’ type=’0’>15</problem>
<problem group=’16’ type=’0’>16а</problem>
<problem group=’16’ type=’0’>16б</problem>
<problem group=’17’ type=’0’>17</problem>
<problem group=’18’ type=’0’>18</problem>
</listok>