**Определение 1.** *Многочленом степени $n$ от одной переменной $x$* называется любое выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0,$$

где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а *коэффициенты* $a_n, \dots, a_0$ — любые числа (даже комплексные), причём $a_n \neq 0$. Краткое обозначение: $A(x)$ или $A$. Коэффициент $a_n$ называют *старшим*. Степень ненулевого многочлена $A$ обозначают $\deg A$. Число 0 называют *нулевым* многочленом, его степень не определена. Множества всех многочленов с целыми, рациональными, действительными, комплексными коэффициентами обозначаются соответственно $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

**Задача 1.** Определите *сумму* и *произведение* многочленов.

**Задача 2.** **а)** Пусть $\deg A = 10$, $\deg B = \deg C = 7$. Какими могут быть $\deg(A+B)$ и $\deg(B+C)$?
**б)** Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$. **в)** Докажите, что $\deg A(B(x)) = \deg A \cdot \deg B$.

**Задача 3.** Может ли произведение нескольких ненулевых многочленов быть нулевым многочленом?

**Определение 2.** Многочлен $A(x)$ задаёт функцию, которая сопоставляет каждому числу $s$ число $A(s)$ (результат подстановки в выражение $A(x)$ числа $s$ вместо переменной $x$).

**Задача 4.** Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:
**а)** $(x-1)^n$; **б)** $(x+1)^n$; **в)** $(x-2)^n$; **г)** $(x+2)^n$; **д)** $(1-x+x^4)^{1000}$.
**е)** Найдите сумму коэффициентов при нечётных степенях у многочлена из пункта д).

## Число корней многочлена

**Определение 3.** Число $s$ называется *корнем* многочлена $A$, если $A(s) = 0$.

**Задача 5.** Докажите, что если многочлен $A$ *делится* на многочлен $B$, то есть существует такой многочлен $C$, что $A = BC$, то все корни $B$ являются корнями $A$. Верно ли обратное утверждение?

**Задача 6.** Делится ли многочлен $x^9 - 1$ на многочлен $x$? А на многочлен $x^2 - 1$?

**Задача 7.** Произвольный многочлен $A(x)$ домножили на $(x-1)$. Могут ли у получившегося многочлена все коэффициенты быть положительными?

**Задача 8.** Докажите, что число $s$ — корень многочлена $A(x)$ если и только если $A(x)$ делится на $x - s$.

**Задача 9.** Пусть $A(1) = A(2) = 0$. Докажите, что $A(x)$ делится на $(x-1)(x-2)$.

**Задача 10.** Докажите, что число различных корней многочлена $A$ не больше $\deg A$.

**Задача 11.** Могут ли разные многочлены задавать одну и ту же функцию?

**Задача 12.** Пусть многочлен $A(x)$ таков, что $A(x) = A(-x)$ при любом $x$. Докажите, что существует такой многочлен $P(x)$, что $A(x) = P(x^2)$ при любом $x$.

**Задача 13.** Можно ли задать многочленом функцию $\sin x$?

**Задача 14.** Пусть значения многочленов $A$ и $B$ совпадают при $n$ различных значениях переменной, и степени этих многочленов меньше $n$. Докажите, что тогда $A = B$.

**Задача 15.** В скольких точках прямая может пересекать параболу?

**Задача 16.** **а)** Докажите, что любой многочлен степени 3 представляется в виде

$$a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2).$$

**б)** Найдите такой многочлен $P(x)$ степени 3, что $P(0) = -8$, $P(1) = 5$, $P(2) = 6$, $P(3) = 1$.

**Задача 17.** Даны различные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ и любые числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.
**а)** Найдите многочлен степени $n-1$, который равен $b_1$ при $x = a_1$ и равен 0 при $x \in \{a_2, \dots, a_n\}$.
**б)** Докажите, что существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше $n$ такой, что $P(a_1) = b_1$, $\dots$, $P(a_n) = b_n$.