Ваша оценка где-то между e и π.
Профессор на экзамене

Определение 1. Числом e называется $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Существование этого предела следует из задачи 2.

Задача 1. Пусть $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что выполнено неравенство $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

Задача 2. (*о числе* e) Докажите, что

а) последовательность $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает;

б) последовательность $E_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает;

в) $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$

г) выполнено неравенство $2{,}25 < e < 3{,}375$;

д) Найдите такое n, что $|e - e_n| < 10^{-6}$.

Задача 3. Пусть вероятность попасть под машину, переходя улицу в неположенном месте, равна 0,01. Какова вероятность остаться целым, сто раз перейдя улицу в неположенном месте? Как связана эта вероятность с числом e? Вычислите ее поточнее.

Задача 4. Пусть (x_n) — последовательность положительных чисел, стремящаяся к a. Докажите[1], что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует предел последовательности $(\sqrt[k]{x_n})$, равный $\sqrt[k]{a}$.

Задача 5. Пусть (x_n) — монотонная последовательность, и некоторая её подпоследовательность (x_{n_i}) имеет предел a. Докажите, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Задача 6. (*о числе* e^r) Докажите, что **а)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$, если число k — целое; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$, если число r — рационально;

г)* одна из последовательностей $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ и $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{n+r}$ монотонно возрастает, другая — монотонно убывает, и пределы обеих последовательностей равны e^r.

Задача 7. Обозначим сумму $\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$ через s_n, а число $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ по-прежнему через e_n.

а) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $e_n \leqslant s_n$;

б) Зафиксируем натуральное число N и рассмотрим любое натуральное $n > N$. Раскроем скобки в выражении $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по биному Ньютона и оставим лишь первые $N+1$ слагаемых. Докажите, что предел полученной таким образом последовательности равен s_N;

в) Докажите, что $s_N \leqslant e$;

г) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$;

д)* Докажите, что $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}}$;

е)* Найдётся ли $n < 100$ такое, что $|e - s_n| < 10^{-6}$?

ж)* Докажите, что для любого $r \in \mathbb{Q}$ существует предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{r^i}{i!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r^1}{1!}+\ldots+\frac{r^n}{n!}\right) = e^r$.

Задача 8. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$. (Подсказка: Задача номер 2 здесь удивительным образом поможет)

Задача 9*. На полке стоят N книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте? Как ответ связан с числом e?

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж	8	9

[1]Домножение на сопряжённое будет крайне уместно и в этой задаче :)

Ваша оценка где-то между e и π.
Профессор на экзамене

Определение 2. Числом e называется $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Существование этого предела следует из задачи 2.

Задача 1. Пусть $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что выполнено неравенство $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

Задача 2.

в) Докажите, что существует предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

г) Докажите, что выполнено неравенство $2{,}4 < e < 3$;

д) Найдите такое n, что $\left|e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right| < 10^{-9}$.

Задача 3. Пусть вероятность попасть под машину, переходя улицу в неположенном месте, равна 0,01. Какова вероятность остаться целым, сто раз перейдя улицу в неположенном месте? Как связана эта вероятность с числом e? Вычислите ее поточнее/

Задача 4. Пусть (x_n) — последовательность положительных чисел, стремящаяся к a. Докажите, что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует предел последовательности $(\sqrt[k]{x_n})$, равный $\sqrt[k]{a}$.

Задача 5. Пусть (x_n) — монотонная последовательность, и некоторая её подпоследовательность (x_{n_i}) имеет предел a. Докажите, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Задача 6. Докажите, что

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$, если число r — рационально;

г) одна из последовательностей $e_n = \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ и $E_n = \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{n+r}$ монотонно возрастает, другая — монотонно убывает, и пределы обеих последовательностей равны e^r.

Задача 7. Обозначим сумму $\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$ через s_n.

г) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$;

е) Найдётся ли $n < 100$ такое, что $|e - s_n| < 10^{-9}$?

ж) Докажите, что для любого $r \in \mathbb{Q}$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{r^i}{i!} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r^1}{1!}+\ldots+\dfrac{r^n}{n!}\right) = e^r$.

Задача 8. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$.

Задача 9*. На полке стоят N книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте? Как ответ связан с числом e?

1	2 в	2 г	2 д	3	4	5	6 в	6 г	7 г	7 е	7 ж	8	9