Листок №18 | **Предел последовательности.** | 01.2015

Определение 1. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если (x_n) можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, что (x_n) *стремится к a при n, стремящемся к бесконечности* (и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$).

Задача 1. Может ли последовательность иметь более одного предела?

Задача 2. Найдите предел (x_n), если он есть: **а)** $x_n = 1 + (-0,1)^n$; **б)** $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; **в)** $x_n = (-1)^n$; **г)** $x_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$; **д)** $x_n = 1 + 0,1 + \ldots + (0,1)^n$; **е)** $x_n = \dfrac{1 + 3 + \ldots + 3^n}{5^n}$; **ж)** $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Определение 2. *Окрестность* точки a — это любой интервал, содержащий точку a. Обозначение: $\mathcal{U}(a)$.

Задача 3. Докажите, что любые две точки на прямой имеют непересекающиеся окрестности.

Определение 3. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если в любой окрестности числа a содержатся *почти все* члены (x_n) (то есть все, кроме конечного числа).

Определение 4. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $k > N$ будет выполнено неравенство $|x_k - a| < \varepsilon$.

Задача 4. Докажите эквивалентность определений 1, 3 и 4.

Задача 5. Запишите без отрицания: **а)** «число a не предел (x_n)»; **б)** «(x_n) не имеет предела».

Задача 6. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) > 0$. Верно ли, что **а)** $x_n > 0$ при $n \gg 0$; **б)** $(1/x_n)$ ограничена (если определена)?

Задача 7. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Найдите **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm y_n$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$.
в) Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n$?

Задача 8. Найти предел $(n\to\infty)$: **а)** $1+q+\ldots+q^n$, где $|q| < 1$; **б)** $\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2}$; **в)** $\sqrt[n]{2}$; **г)** $\dfrac{n^{50}}{2^n}$; **д)** $\sqrt[n]{n}$.

Задача 9. Может ли последовательность без наименьшего и наибольшего членов иметь предел?

Задача 10. **а)** Последовательность (x_n) имеет предел. Докажите, что $(x_{n+1} - x_n)$ бесконечно малая.
б) Верно ли обратное?

Задача 11. Последовательность (x_n) положительна, а последовательность (x_{n+1}/x_n) имеет пределом некоторое число, меньшее 1. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

Задача 12. Найдите: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{n^2+n+1}$ **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-2}{n^3+n}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^9-n^4+1}{2n^9+7n-5}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^{50}}{n^{50}}$.

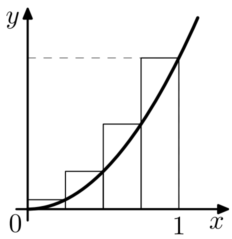
Задача 13. Найдите ошибку в рассуждении: «Пусть $x_n = (n-1)/n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/n) = 1$. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1/n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0$. Отсюда $0 = 1$.»

Задача 14. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $x_n > y_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что **а)** $a > b$; **б)** $a \geqslant b$?

Задача 15. Обобщите теорему о двух милиционерах из листка 16 на последовательности, имеющие предел.

Задача 16. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Найти **а)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2}{7}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}$.

Задача 17. **а)** Дана фигура, ограниченная графиком функции $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$. Разобьём отрезок $[0,1]$ на n равных частей и построим на каждой части прямоугольник так, чтобы его правая верхняя вершина лежала на графике (см. рис. справа). Сумму площадей прямоугольников обозначим S_n. Найдите предел (S_n) при $n \to \infty$.
б) Построим прямоугольники так, чтобы их левые верхние вершины лежали на графике. Сумму их площадей обозначим s_n. Докажите, что (s_n) стремится к тому же числу, что и (S_n) (его естественно считать *площадью* нашей фигуры).
в)* Решите ту же задачу для функции $y = x^k$, где $k \in \mathbb{N}$.



1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	9	10 а	10 б	11	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14 а	14 б	15	16 а	16 б	16 в	17 а	17 б	17 в