Листок №$17\frac{1}{2}$ 12.2014

Асимптотические обозначения

Определение 1. Пусть (x_n) и (y_n) — две последовательности. Говорят, что $x_n = O(y_n)$ (читается как «икс-эн есть о большое от игрек-эн»), если существуют константа C такая, что $|x_n| \leqslant C \cdot |y_n|$ при $n \gg 0$. Говорят, что $x_n = o(y_n)$ (читается как «икс-эн есть о малое от игрек-эн»), если для любого числа $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_n| \leqslant \varepsilon \cdot |y_n|$ выполнено при $n \gg 0$.

Используя асимптотические обозначения очень удобно выделять самую «весомую» часть последовательности. Например, пишут $(n+1)^2 = n^2 + o(n^2)$ или $(n+1)^2 = n^2 + O(n)$, имея в виду, что заменив каждое асимптотическое выражение на подходящую последовательность, удовлетворяющую этой асимптотике, можно получить тождество. В нашем примере в качестве такой последовательности выступает $(2n+1)$, ведь $2n+1 = o(n^2)$ и $2n+1 = O(n)$.

Задача 1. Докажите, что **а)** $x_n = O(1)$ тогда и только тогда, когда последовательность (x_n) ограничена; **б)** $x_n = o(1)$ тогда и только тогда, когда последовательность (x_n) бесконечно малая; **в)** если в последовательности (y_n) нет нулевых членов, то $x_n = O(y_n)$ тогда и только тогда, когда (x_n/y_n) ограничена, а $x_n = o(y_n)$ равносильно тому, что (x_n/y_n) — бесконечно малая.

Задача 2. Какой смысл у тождеств: $o(1) + o(1) = o(1)$, $o(1) \cdot O(1) = o(1)$, $o(1) + O(1) = O(1)$?

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны: **а)** $\sin n = O(1)$; $\sin n = o(1)$;
б) $n^2 = O(n^3)$; $n^2 = o(n^3)$; $n^2 = O(n)$; $n^2 = o(n)$; $1/n^2 = O(1/n^3)$; $1/n^2 = o(1/n)$.

Задача 4. Докажите, что **а)** $(n+1)^3 = n^3 + o(n^3)$; **б)** $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + O(n^2)$;
в) $1 + 2 + \ldots + n = n^2/2 + O(n)$; **г)** $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n^3/6 + O(n^2)$;

Задача 5°. (*основные асимптотики*) Докажите, что **а)** $n^k = o(n^l)$ при $k < l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$;
б) $n^k = o(a^n)$ при $a > 1$; **в)** $a^n = o(n^k)$ при $0 < a < 1$; **г)** $a^n = o(n!)$; **д)** $n! = o(n^n)$;

Задача 6. Можно ли утверждать, что $x_n = o(z_n)$, если **а)** $x_n = o(y_n)$ и $y_n = o(z_n)$;
б) $x_n = O(y_n)$ и $y_n = O(z_n)$; **в)** $x_n = o(y_n)$ и $y_n = O(z_n)$; **г)** $x_n = O(y_n)$ и $y_n = o(z_n)$.

Задача 7. Известно, что $x_n = O(n^4)$ и $y_n = o(n^3)$. Что можно сказать про $x_n + y_n$ и $x_n \cdot y_n$?

Определение 2. Используют также обозначения вида $n \cdot (1 + O(1/n)) + 2^{o(1)} = n + O(1)$, где асимптотические обозначения есть с обеих сторон равенства. В этом случае имеют в виду следующее: если заменить каждое асимптотическое выражение в левой части на любую последовательность, удовлетворяющую этой асимптотике, то в правой части можно заменить каждое асимптотическое выражение на подходящую последовательность так, чтобы получить тождество.

Задача 8°. Докажите, что **а)** $x_n \cdot O(y_n) = O(x_n y_n)$; $O(x_n) \cdot O(y_n) = O(x_n y_n)$;
б) $x_n \cdot o(y_n) = o(x_n) \cdot o(y_n) = o(x_n) \cdot O(y_n) = O(x_n) \cdot o(y_n) = o(x_n y_n)$;
в) если $x_n = O(y_n)$, то $O(x_n) + O(y_n) = O(y_n)$ и $o(x_n) + o(y_n) = o(y_n)$;

* * *

Задача 9. **а)** Предполагая, что формула $\sqrt{1 + 1/n} = 1 + 1/2n + a/n^2 + O(1/n^3)$ верна для некоторой константы a, найдите значение a. **б)*** Докажите, что при этом a формула действительно верна.

Задача 10. Укажите такие числа a и b, что $\sqrt[3]{1 + 1/n} = 1 + a/n + b/n^2 + O(1/n^3)$, считая что для некоторых a и b эта формула действительно верна.

Задача 11. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Укажите такое число a, что $\sqrt[k]{1 + 1/n} = 1 + a/n + O(1/n^2)$.

Задача 12. **а)** При анализе алгоритма выяснилось, что время его работы $T(n)$ на входе длины n удовлетворяет соотношению $T(n) = T([n/2]) + T([n/3]) + O(n)$. Докажите, что $T(n) = O(n)$.
б)* Что можно сказать о $T(n)$, если $T(n) = 2T([n/2]) + O(n)$?

Задача 13*. Считая, что при неких a и b верна формула $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2 = a + b/n + O(1/n^2)$, найдите b. (Найти a гораздо сложнее, $a = \pi^2/6$.)

Задача 14°. (*асимптотика факториала*)
а) Докажите, что для любого натурального числа n выполнены неравенства $\left(\dfrac{n}{4}\right)^n \leqslant n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$;
б)** (*формула Стирлинга*) Докажите, что $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

1 а	1 б	1 в	2	3 а	3 б	4 а	4 б	4 в	4 г	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	6 а	6 б	6 в	6 г	7	8 а	8 б	8 в	9 а	9 б	10	11	12 а	12 б	13	14 а	14 б