Листок №17 **Неравенства и оценки.** 12.2014

Задача 1. Что больше: **а)** 5^{15} или 15^5; **б)** 2^{100} или 10^{30}; **в)** 3^{500} или 7^{300}?

Задача 2. **а)** Докажите, что $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$.

б) Каково наименьшее значение $a+\dfrac{9}{a}$ при $a>0$?

Задача 3. **а)** Число x изменили не более, чем на $0,1$. Могло ли при этом значение x^2 измениться более, чем на 10? **б)** Тот же вопрос для значения $\sqrt{x}$.

Задача 4. Найдите первые **а)** девять; **б)** десять знаков после запятой у числа $\sqrt{0,999\,999\,999}$.

Задача 5*. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

Задача 6. Описанный около круга квадрат разбили на 100×100 равных квадратиков и закрасили квадратики, не выходящие за пределы круга. Докажите, что площадь закрашенной фигуры не меньше 94% площади круга.

Задача 7. Докажите, что $x^{n_1}-x^{n_2}+x^{n_3}-\dots+x^{n_{2k+1}}\geqslant 0$ при $x>0$, если $n_1>n_2>\dots>n_{2k+1}$ натуральные.

Задача 8. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии с натуральными основанием и разностью найдется число, десятичная запись которого начинается с 1.

Задача 9. Сколько цифр в десятичной записи **а)** 2^{40}; **б)** 2^{100}; **в)*** чисел 2^{2010} и 5^{2010} вместе?

***

Задача 10. В банк кладут 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет получат больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы раз в год или если он начисляет $(5/12)$% раз в месяц?

Задача 11. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных x выполнены неравенства **а)** (*неравенство Бернулли*) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$; **б)** $(1+x)^n\geqslant 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$.

Задача 12. Укажите такое целое $n>1$, что **а)** $1,001^n>10^5$; **б)** $0,999^n<10^{-5}$.

Задача 13. **а)** Пусть $b>1$. Докажите, что найдётся такое натуральное k, что при любом натуральном $n\geqslant k$ будет выполнено неравенство $b^n>1000$ (то есть, $b^k>1000$, $b^{k+1}>1000$, $b^{k+2}>1000$, и так далее).
б) Можно ли заменить 1000 на любое другое конкретное число?

Задача 14. **а)** Найдётся ли такое C, что при любом натуральном $n\geqslant C$ будет выполнено неравенство $(1,01)^n>1000n$?
б) А если заменить число $1,01$ на любое конкретное число, большее 1, а число 1000 — на любое конкретное положительное число?

Задача 15. При каких натуральных n выполнено неравенство **а)** $2^n\geqslant n$; **б)** $2^n\geqslant n^2$?

Задача 16. **а)** Пусть $q>1$. Пусть последовательность положительных чисел (x_n) такова, что, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $x_{n+1}/x_n>q$. Докажите, что тогда, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $x_n>1$.
б) Останется ли верным утверждение задачи, если $q=1$?

Задача 17. Найдётся ли такое k, что при всех натуральных $n\geqslant k$ будет выполнено $2^n>n^{50}$?

Задача 18. **а)** Найдётся ли такое число C, что при любом натуральном $n\geqslant C$ будет выполнено неравенство $n!>100^n$? **б)** А если заменить число 100 на любое другое конкретное число?

Определение 1. Говорят, что неравенство верно «при всех достаточно больших n» или «при n много больше нуля», если найдётся такое k, что неравенство верно при всех $n>k$. Обозначение: верно при $n\gg 0$.

Задача 19. **а)** Докажите, что неравенство $n^n>10^6\cdot n!$ выполнено при $n\gg 0$.
б) Можно ли заменить 10^6 на любое другое число?

Задача 20. **а)** Докажите, что $0,001n^2>100n+179$ при $n\gg 0$.
б) Число C — любое, n и m — натуральные, причём $n>m$. Докажите, что $x^n>Cx^m$ при $x\gg 0$.
в) Дан многочлен $P(x)=p_kx^k+p_{k-1}x^{k-1}+\dots+p_1x+p_0$, где $p_k>0$. Верно ли, что $P(x)>0$ при $x\gg 0$?

Задача 21. Докажите, что для любого a неравенство $n!>a^n$ выполнено при $n\gg 0$.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7	8	9 а	9 б	9 в	10	11 а	11 б	12 а	12 б	13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17	18 а	18 б	19 а	19 б	20 а	20 б	20 в	21