Теорема 1. (Основная теорема арифметики) *Для каждого натурального числа $n > 1$ существует и единственно (с точностью до порядка сомножителей) его представление в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые. Такое представление называется каноническим разложением n на простые множители.*

Задача 1. (*Существование*) Докажите что для каждого натурального числа $n > 1$ найдутся такие простые числа $p_1, \ldots, p_k$, что $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Задача 2. (*Единственность: доказательство «от противного»*) Предположим, что n — минимальное натуральное число, большее 1, у которого есть два различных разложения в произведение простых: $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ и $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$, где $p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_k$, $q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_s$ — простые числа. Докажите, что
а) $n \geqslant p_1^2$, $n \geqslant q_1^2$; **б)** $n > p_1 q_1$;
в) $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ делится на q_1 (*Указание:* рассмотрите число $n - p_1 q_1$);
г) пункт в) противоречит нашему предположению.

Есть два других доказательства теоремы, опирающиеся на такое свойство простых чисел:

Для любого простого числа p верно следующее утверждение: если $mn \vdots p$, то либо $m \vdots p$, либо $n \vdots p$. **(*)**

Задача 3. Докажите единственность разложения на простые, используя **(*)**.

Задача 4. (*Единственность: доказательство, использующее представление (a,b) в виде ax + by*)
Пусть a, b — целые числа, причем $(a, b) = 1$. Тогда
а) найдется такое целое x, что $ax \equiv 1 \pmod b$; **б)** если $ca \equiv 0 \pmod b$, где c — целое, то $c \equiv 0 \pmod b$.
в) Из пункта б) выведите свойство **(*)**.

Определение 1. Назовём *идеалом* в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ любое подмножество I с такими свойствами:
1) если $i \in I$ и $j \in I$, то и $i + j \in I$ (сумма любых двух чисел из идеала также принадлежит этому идеалу);
2) если $i \in I$, $n \in \mathbb{Z}$, то $ni \in I$ (умножая число из идеала на *любое целое*, мы получаем число из этого идеала).

Задача 5. Верно ли, что разность любых двух чисел из идеала также принадлежит этому идеалу?

Задача 6. Какие из следующих множеств являются идеалами в $\mathbb{Z}$: **а)** $\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{N}$; **в)** множество чётных целых чисел; **г)** множество нечётных целых чисел; **д)** $\{0\}$ (нулевой идеал); **е)** множество чисел, делящихся на целое число m (обозначение: $m\mathbb{Z}$); **ж)** *сумма идеалов I_1 и I_2* — множество всевозможных сумм вида $x_1 + x_2$, где $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$; **з)** *пересечение идеалов I_1 и I_2* — множество $\{x \mid x \in I_1, x \in I_2\}$.

Задача 7. (*Теорема об идеалах в $\mathbb{Z}$*) Пусть r — наименьшее положительное число, принадлежащее ненулевому идеалу I (оно называется *порождающим элементом* идеала I). Докажите, что
а) любое число из I делится на r; **б)** I состоит из всех целых чисел, делящихся на r.

Задача 8. (*Единственность: доказательство с идеалами*) Пусть m и n — ненулевые целые числа, $mn \,\big|\, p$ и $(m, p) = 1$. Рассмотрим множество J всех таких целых чисел j, что $mj \,\big|\, p$. Докажите, что **а)** J — идеал; **б)** $1 \notin J$; $p \in J$; **в)** наименьшее положительное число в J равно p; **г)** $n \,\big|\, p$, откуда следует свойство **(*)**.

Задача 9. Числа a, b, c, n натуральные, $(a, b) = 1$, $ab = c^n$. Найдутся ли такие целые x и y, что $a = x^n$, $b = y^n$?

Задача 10. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42} = y^{55}$.

Задача 11. Найдите каноническое разложение числа **а)** 2014; **б)** 1002001; **в)** 17!.

Определение 2. *Наименьшим общим кратным* ненулевых целых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b. Обозначение: $[a, b]$ или $\mathrm{HOK}(a, b)$.

Задача 12. **а)** Как, зная канонические разложения чисел a и b, найти (a, b) и $[a, b]$? **б)** Найдите $[192, 270]$. **в)** Докажите, что $ab = (a, b) \cdot [a, b]$. **г)** Верно ли, что числа $[a, b]/a$ и $[a, b]/b$ взаимно просты?

Задача 13. Докажите, что любое общее кратное целых чисел a и b делится на $[a, b]$.

Задача 14. Про натуральные числа a и b известно, что $(a, b) = 15$, $[a, b] = 840$. Найдите a и b.

Определение 3. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — натуральные. Назовём их *наибольшим общим делителем* порождающий элемент идеала $a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_k\mathbb{Z}$, *наименьшим общим кратным* — порождающий элемент идеала $a_1\mathbb{Z} \cap \cdots \cap a_k\mathbb{Z}$.

Задача 15. Докажите, что для положительных чисел $a_1, \ldots, a_k$
а) наибольший общий делитель d является наибольшим числом, которое делит данные числа;
б) наибольший общий делитель делится на все остальные общие делители;
в) найдутся такие целые числа $x_1, \ldots, x_k$, что $d = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$;
г) наименьшее общее кратное является наименьшим натуральным числом, которое делится на данные числа;
д) наименьшее общее кратное делит остальные *общие кратные* данных чисел.

1	2 а	2 б	2 в	2 г	3	4 а	4 б	4 в	5	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	6 е	6 ж	6 з	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	8 г	9	10	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15 а	15 б	15 в	15 г	15 д