Задача 1. **а)** Докажите, что в любом бесконечном множестве найдется счётное подмножество;
б) Докажите, что множество M бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству, полученному из M удалением одного элемента.

Задача 2. Равномощны ли множества точек:
а) интервал и отрезок;
б) полуокружность и прямая;
в) интервал и прямая;
г) два круга;
д) окружность и треугольник;
е) квадрат и плоскость;
ж) квадрат и круг;
з) отрезок и счётное объединение непересекающихся отрезков?
(*Замечание:* квадрат в этом листке — это квадрат с внутренностью, например множество точек (x, y), где $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.)

Задача 3. Из бесконечного множества M удалили некоторое счётное множество и получили бесконечное множество M'. Докажите, что M и M' равномощны.

Задача 4. Равномощно ли множество иррациональных чисел множеству всех действительных чисел?

Задача 5. Равномощно ли множество всех лучей множеству всех окружностей (на плоскости)?

Задача 6. Докажите, что множество S бесконечных последовательностей из 0 и 1, множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ и множество бесконечных вправо и вниз таблиц из 0 и 1 равномощны.

Задача 7. **а)** Дана бесконечная вправо и вниз таблица из 0 и 1. Покажите, как по этой таблице составить бесконечную строку из 0 и 1, которая не совпадёт ни с одной из строк таблицы.
(*Указание:* надо, чтобы новая строка отличалась от каждой строки таблицы хотя бы в одном месте.)
б) Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 *несчётно:* бесконечно, но не является счётным.
(Говорят, что множества из предыдущей задачи имеют мощность *континуум).*

Задача 8. Пусть S — множество из задачи 6. Докажите, что множества S и $S \times S$ равномощны.

Задача 9. Докажите, что множество всевозможных прямых на плоскости равномощно множеству точек этой плоскости.

Задача 10*. Докажите, что множество точек любого отрезка равномощно
а) множеству S задачи 6;
б) множеству точек квадрата;
в) множеству точек куба.

Задача 11*. Пусть A — счётное множество, M — некоторое множество подмножеств A. Известно, что из любых двух элементов M один есть подмножество другого. Обязательно ли M счётно?

Задача 12*. (*Теорема Кантора–Бернштейна*) Если множество A равномощно подмножеству множества B и множество B равномощно подмножеству множества A, то A и B равномощны.

Задача 13*. Отрезок представлен в виде объединения двух множеств. Докажите, что одно из этих множеств равномощно отрезку. (*Указание:* отрезок равномощен квадрату.)

Задача 14*. Докажите, что множества задачи 6 равномощны
а) множеству взаимно однозначных соответствий между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$;
б) множеству бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Интересный трудный факт. *Из любых двух множеств одно равномощно подмножеству другого.*

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	2 з	3	4	5	6	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	10 в	11	12	13	14 а	14 б