Листок №12 — **Равномощность. Счётные множества** — 04.2014

Определение 1. Говорят, что между множествами A и B задано *взаимно однозначное соответствие,* если каждому элементу множества A поставлен в соответствие какой-то определенный элемент множества B, причём каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A. Множества A и B *равномощны,* если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначение: $|A| = |B|$.

Задача 1. Докажите следующие утверждения:
а) $|A| = |A|$; **б)** если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$; **в)** если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задача 2. Сколько есть взаимно однозначных соответствий между двумя конечными множествами с одинаковым числом элементов?

Задача 3. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

Задача 4. Среди треугольников с целыми сторонами каких больше:
а) периметра 2011 или периметра 2014; **б)** периметра 2012 или периметра 2015?

Задача 5. Сколько существует троек целых чисел $(x; y; z)$, для которых
а) $0 < x < y < z < 13$; **б)** $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 9$?

Задача 6. Даны четыре множества: $\mathbb{N}$, множество чётных натуральных чисел, $\mathbb{Z}$, множество натуральных чисел без числа 3. Какие из этих множеств равномощны между собой?

Задача 7. Равномощны ли следующие множества точек:
а) любые два отрезка различной длины; **б)** любые два интервала различной длины?

Определение 2. Множество называется *счётным,* если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.
Говорят, что множество X *не более чем счётно,* если X конечно (например, пусто) или счётно.

Задача 8. Любое ли счётное множество можно разбить на 3 непересекающихся счётных множества?

Задача 9. В ящике A счётное число орехов, ящики B и C пусты. Берут 10 орехов из ящика A и перекладывают их в ящик B, после чего берут один орех из ящика B и перекладывают его в ящик C. Сколько орехов может оказаться в каждом из ящиков после бесконечного числа таких действий?

Задача 10. Докажите, что **а)** подмножество счётного множества не более чем счётно;
б) если множества A и B счётны, то $A \cup B$ тоже счётно;
в) объединение непустого конечного или счётного множества счётных множеств счётно.

Задача 11. Докажите, что счётно **а)** множество точек плоскости, координаты которых — целые числа; **б)** множество $\mathbb{Q}$; **в)** множество пар $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$, где A и B счётны.

Задача 12*. Найдите алгебраическое выражение от двух переменных x и y, задающее взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости с натуральными координатами и $\mathbb{N}$.

Задача 13. Докажите, что счётно **а)** множество конечных последовательностей из 0 и 1;
б) множество предложений русского языка; **в)** множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Задача 14. Счётно ли **а)** множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны;
б) множество всех треугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны;
в) множество всех многоугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны?

Задача 15. Счётно ли любое бесконечное множество непересекающихся
а) интервалов длины более 1 на прямой; **б)** интервалов на прямой; **в)** кругов на плоскости; **г)** восьмёро на плоскости (восьмёрка — это любые две касающиеся внешним образом окружности); **д)*** букв «Т» (любых размеров) на плоскости?

Задача 16. Счётно ли множество корней квадратных уравнений с рациональными коэффициентами?

Задача 17*. Может ли множество быть равномощно множеству всех своих подмножеств?

1а	1б	1в	2	3	4а	4б	5а	5б	6	7а	7б	8	9	10а	10б	10в	11а	11б	11в	12	13а	13б	13в	14а	14б	14в	15а	15б	15в	15г	15д	16	17