Интеграл Римана

Определение 1. *Разбиением отрезка* $[a,b]$ называется всякий конечный набор точек $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ с условием $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_i - x_{i-1}$ обозначается Δx_i.
Диаметром разбиения σ называется число $\lambda(\sigma) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$.

Определение 2. *Отмеченным разбиением отрезка* $[a,b]$ называется пара (σ, ξ), где $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — набор точек из отрезков разбиения: $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$.

Определение 3. Пусть f — функция на отрезке $[a,b]$, а (σ, ξ) — отмеченное разбиение этого отрезка. *Интегральной суммой* функции f при отмеченном разбиении (σ, ξ) называется

$$\sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение 4. Пусть f — функция на отрезке $[a,b]$. *Интегралом Римана* функции f по отрезку $[a,b]$ называется

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(\sigma)\to 0} \sum_{(\sigma,\xi)} f\Delta x,$$

где предел берется по всем отмеченным разбиениям (σ, ξ) отрезка $[a,b]$ при $\lambda(\sigma) \to 0$. Функция f называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a,b]$, если этот предел (т. е. интеграл) существует. Обозначение: $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Задача 1. Интегрируемы ли на отрезке $[0,1]$ функции: **а)** $f(x) = x$; **б)** $f(x) = x^{-1}$?

Задача 2. Докажите, что если изменить значение функции в конечном числе точек, то ее интегрируемость на отрезке $[a,b]$ и значение интеграла не изменятся.

Интеграл Дарбу

Определение 5. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, f — функция, ограниченная на этом отрезке. Положим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Числа $s_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ и $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу* функции f при разбиении σ.

Задача 3. Объясните геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу и «нарисуйте» их
а) для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0,1]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 4\}$;
б) для функции $f(x) = (x-1)^2$ на отрезке $[0,2]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 8\}$.

Задача 4. Можно ли исключить из определения 5 условие ограниченности функции f на отрезке $[a,b]$?

Задача 5. Найдите нижние и верхние суммы Дарбу при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{n} \mid i = 0, \ldots, n\}$ отрезка $[0,1]$ функций **а)** $f(x) = x$; **б)** $f(x) = x^2$; **в)** $f(x) = \sin \pi n x$.

Определение 6. Для ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f числа $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка, называются *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f на отрезке $[a,b]$.

Задача 6. Найдите I_* и I^* для
а) $f(x) = x$ на $[0,1]$; **б)** $f(x) = x^2$ на $[0,1]$; **в)** функции Дирихле на отрезке $[a,b]$.

Теорема 1. (Дарбу) *Функция f интегрируема (по Риману) на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке, и $I_* = I^*$. При этом $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$.*

Задача 7. Верно ли, что всякая ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

Теорема 2. *Монотонная функция на отрезке интегрируема на нём.*

Задача 8*. **а)** Покажите, что существует и единственна непрерывная функция f на отрезке $[0,1]$, такая что
1) $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{2}$ при $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$;
3) $f(x) = 2 \cdot f(\frac{x}{3})$ и $f(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}) = f(\frac{x}{3}) + \frac{1}{2}$ при $x \in [0,1]$.

б) Найдите $\int\limits_0^1 f(x)dx$; **в)** В каких точках функция f дифференцируема?

Такая функция f называется *лестницей Кантора*.

1 а	1 б	2	3 а	3 б	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	7	8 а	8 б	8 в