Листок №29 Перестановки 12.2012

Определение 1. *Перестановка* чисел $1, \dots, n$ — это взаимно однозначное отображение множества $\{1, \dots, n\}$ на себя. Множество перестановок чисел $1, \dots, n$ обозначается S_n и называется *симметрической группой* или *группой перестановок.*

Задача 1. Сколько элементов в симметрической группе S_n?

Перестановку $\sigma \in S_n$ изображают следующим образом: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ Другие способы записи можно посмотреть на второй странице.

Определение 2. *Произведение* перестановок $\sigma, \tau \in S_n$ определяется так: $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ (для произвольных отображений σ и τ такое произведение обычно называется *композицией отображений*). Пример см. на обороте. Отметим, что сначала применяется второй сомножитель, а потом первый.

Зафиксируем следующие обозначения: $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Вычислите: **а)** $\tau_1\tau_2$; **б)** $\tau_2\tau_1$; **в)** τ_1^2; **г)** τ_1^3.

Задача 3. **а)** Найдите $e \in S_n$ такую, что $\forall a \in S_n$ $ae = ea = e$. Докажите, что такая перестановка единственна (её называют *единичной* или *тождественной.*) **б)** Докажите, что $\forall \sigma, \tau, \eta \in S_n$ $\sigma(\tau\eta) = (\sigma\tau)\eta$ (*ассоциативность).* **в)** Докажите, что для каждой перестановки σ существует единственная перестановка τ такая, что $\sigma\tau = \tau\sigma = e$. Перестановка τ называется *обратной* к σ и обозначается как σ^{-1}.

Задача 4. Пусть для некоторой $\tau \in S_n$ и для всех $\sigma \in S_n$ $\sigma\tau = \tau\sigma$. Верно ли, что $\tau = e$?

Задача 5. Докажите, что для любой перестановки $\sigma \in S_n$ существует такое натуральное число k, что $\sigma^k = e$. Минимальное k с этим свойством называется *порядком* перестановки σ и обозначается $\operatorname{ord}\sigma$.

Задача 6. Вычислите **а)** порядки перестановок τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5; **б)** τ_1^{100}; **в)** τ_4^{-1000}; **г)** τ_5^{500}.

Определение 3. *Циклом* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ называется перестановка, циклически переставляющая элементы $a_1, a_2, \dots, a_k$(то есть $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3$, $\dots$, $a_k \mapsto a_1$; имеется в виду, что все элементы $a_1, a_2, \dots, a_k$ различны; все остальные элементы множества $\{1, \dots, n\}$ переходят в себя). Число k называется *длиной* цикла.

Задача 7. Каков порядок цикла длины k? Сколько всего циклов длины k в S_n?

Задача 8. **а)** Докажите, что если σ и τ — циклы, множества элементов которых не пересекаются (такие циклы называются *независимыми*), то $\sigma\tau = \tau\sigma$ (циклы *коммутируют*). **б)** Верно ли, что циклы коммутируют тогда и только тогда, когда они независимы?

Задача 9. Докажите, что любая перестановка равна произведению некоторого набора независимых циклов. Сколькими способами (с точностью до перестановки множителей)?

Начиная с этого момента для упрощения записи рекомендуется записывать все перестановки в виде произведения циклов.

Задача 10. **а)** Пусть порядок перестановки равен двум. Разложим её в произведение независимых циклов. Какими могут быть длины этих циклов? **б)** Пусть σ — это k-я степень цикла $(1, 2, \dots, n)$. На сколько независимых циклов раскладывается σ? Каковы длины этих циклов?

Задача 11. Найдите максимальный порядок перестановки **а)** из S_5; **б)** из S_{13}.

Задача 12. Докажите, что порядок любой перестановки из S_n делит $n!$. Может ли он быть равен $n!$?

Определение 4. *Транспозиция* — это цикл длины два. Транспозицию вида $(i, i+1)$ называют *элементарной.*

Задача 13. **а)** Докажите, что любая перестановка равна произведению некоторого набора транспозиций. **б)** Любая ли перестановка равна произведению некоторого набора элементарных транспозиций? **в)** Напишите такое представление для перестановок τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5.

Задача 14. Любую ли перестановку из S_n можно представить как произведение транспозиций вида $(1, k)$?

Определение 5. *Беспорядок* или *инверсия* в перестановке σ — это такая пара (i, j), что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка называется *чётной*, если число инверсий в ней чётно, и *нечётной* в противном случае. *Знаком перестановки* называется функция $\operatorname{sgn}(\sigma)$, равная 1 для чётной перестановки и -1 для нечётной.

Задача 15. Найдите чётность перестановок **а)** e; **б)** τ_1; **в)** τ_2; **г)** τ_2^2; **д)** τ_2^3; **е)** $\tau_1 \cdot \tau_2$; **ж)** $\tau_2 \cdot \tau_1$; **з)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 16. Можно ли сказать, сколько инверсий у перестановки σ^{-1}, зная лишь число инверсий у σ?

Задача 17. Найдите знак **а)** элементарной транспозиции; **б)** транспозиции; **в)** произведения перестановки σ и транспозиции, зная знак σ; **г)** цикла длины n; **д)** произведения $\sigma_1\sigma_2$, зная знаки σ_1, σ_2.

Задача 18. Найти количество чётных перестановок в S_n.

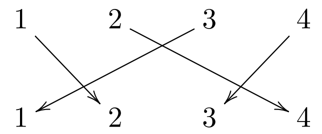
Задача 19*. Докажите, что в игре в "пятнашки" нельзя поменять местами фишки с номерами 14 и 15, не меняя при этом положение остальных фишек.

1	2 а	2 б	2 в	2 г	3 а	3 б	3 в	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13 а	13 б	13 в	14	15 а	15 б	15 в	15 г	15 д	15 е	15 ж	15 з	16	17 а	17 б	17 в	17 г	17 д	18	19

Таблица вида $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$; означает перестановку $1 \mapsto 2$ (то есть 1 переходит в 2), $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 3$. Также можно для удобства переставлять столбцы местами:

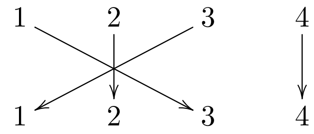
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

Для наглядности, ту же перестановку можно изобразить картинкой вида

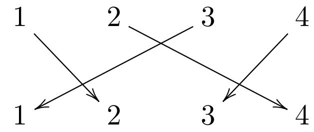


Пример вычисления произведения перестановок: если

$$\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

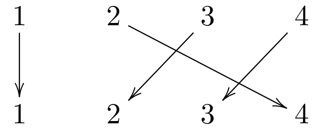


$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix},$$



то

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$



При помощи обычного определения удобно вычислять произведение так: в перестановке σ переставляем столбцы так, что первая строчка в σ совпадает с последней строчкой в τ. Тогда произведением будет перестановка, у которой первая строчка — стандартная, а вторая строчка — это вторая строчка из σ. Пример:

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Перестановки удобно перемножать и в том случае, когда они представлены в виде произведения непересекающихся циклов (см. определение 3). Например:

$\sigma\tau = (1, 2, 4, 3) \cdot (1, 3) = (2, 4, 3)$.

При этом произведение получается так: для каждого элемента от 1 до 4 надо пройти по циклам в левой части и проследить куда он переходит. В частности, 3 сначала переходит в 1 (цикл $(1, 3)$), а затем 1 в 2 (цикл$(1, 2, 4, 3)$). Значит в произведении 3 будет переходить в 2.