

Комбинаторика и случайные блуждания

Задача 1. (Задача о баллотировке) На выборах кандидат P набрал p голосов, а кандидат Q набрал q голосов, $p > q$. Найдите вероятность того, что при последовательном подсчете голосов P все время был впереди Q .

Задача 2. Игрок с n монетами играет против казино с неограниченным числом монет. За одну игру он равновероятно проигрывает либо выигрывает монету, и играет пока не разорится. Какова вероятность разориться ровно за m игр?

Задача 3. Пусть мы находимся в целочисленной точке горизонтальной прямой и каждую секунду сдвигаемся с вероятностью $1/2$ на 1 вправо или влево. Начало координат обозначим через O .

- Найдите число способов попасть из O в точку с координатой x через t секунд ($t \geq x \geq 0$).
- (Принцип отражения) Докажите, что число способов попасть через t секунд из точки $x > 0$ в точку $y > 0$, не проходя через O , равно числу способов попасть через t секунд из точки $-x$ в точку y .
- Найдите число способов попасть из O в точку $x > 0$ через t секунд, не проходя при этом второй раз через O .
- Найдите число способов выйти из O и двигаться t секунд, не проходя при этом второй раз через O .

- Задача 4.**
- Мы находимся в начале координат O . Найдите вероятность u_{2t} возвращения в O через $2t$ секунд.
 - Обозначим через f_{2t} вероятность первого возвращения в O через $2t$ секунд. Докажите, что $f_{2t} = u_{2t-2} - u_{2t}$.
 - Докажите, что случайное блуждание на прямой *возвратно*: выйдя из O , мы вернемся обратно с вероятностью 1.
 - Докажите, что, выйдя из начала координат, мы с вероятностью 1 достигнем каждой целочисленной точки.

Игры

Задача 5. Каждый из двух игроков пишет на бумажке число 1 или 2, после чего они одновременно открывают бумажки. Если числа совпали, то первый платит второму столько рублей, каковы эти числа; если нет — второй платит первому a рублей. При каком значении a эта игра будет честной? Разберите сначала случаи:

- Каждый игрок равновероятно выбирает 1 или 2.
- Первый выбирает 1 с вероятностью p , а второй выбирает 1 с вероятностью q (где $0 \leq p, q \leq 1$).
- То же, что и в п. б), но до игры первый выбирает p , а второй q , независимо и равновероятно из отрезка $[0; 1]$.
- Каков же ответ в общем случае и как играть игрокам?

Задача 6. Каждый из двух игроков пишет на бумажке по целому числу, потом они одновременно открывают эти числа. Если их сумма делится на 3, то второй платит первому рубль; если нет — второй получает a рублей от первого. При каком значении a эта игра будет честной? Разберите сначала частные случаи, как и в задаче 5.

Геометрические вероятности

Задача 7. Палку случайным образом ломают на три части. С какой вероятностью из них можно сложить треугольник?

Задача 8. (Парадокс Бертрана) С какой вероятностью случайная хорда некой данной окружности будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность? Разберите два подхода:

- фиксируем один конец хорды на окружности и выбираем подходящее направление хорды;
- фиксируем направление хорды, на перпендикулярном диаметре выбираем подходящие точки пересечения с хордой.

Задача 9. Плоскость разлинована параллельными прямыми (на расстоянии 1 друг от друга). Дано число $\lambda < 1$.

- На плоскость бросают окружность длины λ . Найдите вероятность того, что она пересечет хоть какую-то прямую.
- На плоскость бросают стозвенную ломаную длины λ , двухзвенную ломаную длины λ и иглу длины λ . Одинаковы ли их вероятности пересечь хоть какую-то прямую? **в)** (Задача Бюффона) Найдите эту вероятность для иглы.

Задача 10*. Монету радиусом r и толщиной d бросают на горизонтальную поверхность (соударение неупругое). Какова вероятность того, что монета упадет на ребро?

Математическое ожидание

Задача 11. Человек с n ключами хочет отпереть дверь, испытывая ключи независимо друг от друга в случайном порядке. Найдите среднее число испытаний, если не подошедшие ключи далее **а)** исключаются; **б)** не исключаются.

Задача 12. Средний интервал движения автобуса №103 равен 35 минутам, а средний интервал движения автобуса №130 равен 20 минутам. Сколько в среднем нужно ждать **а)** автобус №103; **б)** один из этих автобусов?

Задача 13. Пачка жевательной резинки содержит один из n разных, но равновероятных вкладышей. Сколько пачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

Разное

Задача 14. Как троим друзьям бросить жребий, если у них есть одна монета (которую можно многократно бросать)?

Задача 15. Про вид бактерий известно, что каждая бактерия через 1 мин после рождения делится с вероятностью p_k на k потомков, где $k \in \{0, \dots, 10\}$, а p_0 — вероятность смерти бактерии через 1 мин после рождения. Пусть x — вероятность того, что весь род, начавшийся с данной бактерии, когда-то целиком вымрет. Докажите, что $x = p_0 + p_1x + \dots + p_{10}x^{10}$.

Задача 16. Датчик случайных чисел выдает конечное число чисел, каждое — со своей вероятностью. Датчик *сильнее* другого, если с вероятностью, большей $1/2$, выданное им число больше числа, выданного другим датчиком. Можно ли сделать датчики A , B и C так, чтобы A был сильнее B , B сильнее C , а C сильнее A ?

Задача 17*. Царь выбирает самую красивую невесту из 100 претенденток. Претендентки в случайном порядке приходят к царю, и в какой-то момент он объявляет очередную претендентку своей невестой (царь заранее не знает их, но легко упорядочивает по красоте). Докажите, что царь может выбрать самую красивую с вероятностью, большей $1/3$.

1	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	7	8	8	9	9	9	10	11	11	12	12	13	14	15	16	17
		а	б	в	г	а	б	в	г	а	б	в	г			а	б	а	б	в		а	б	а	б					

Фамилия, Имя	1	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	7	8	8	9	9	9	10	11	11	12	12	12	13	14	15	16	17			
			а	б	в	г	а	б	в	г	а	б	в	г			а	б	в	г	*	а	б	а	б	а	б					*			
1. Андреев Валентин																																			
2. Большаков Иван																																			
3. Гайворонский Андрей																																			
4. Говорухин Ярослав																																			
5. Дегтярев Федор																																			
6. Денисенко Анна																																			
7. Зайцев Андрей																																			
8. Карпов Андрей																																			
9. Константиновский Никита																																			
10. Левинсон Татьяна																																			
11. Луценко Михаил																																			
12. Мирошниченко Вероника																																			
13. Нагайко Иван																																			
14. Назаров Борис																																			
15. Парубченко Александр																																			
16. Перунов Иван																																			
17. Пчелина Дарья																																			
18. Рудько Юрий																																			
19. Скурида Василий																																			
20. Смык Екатерина																																			
21. Фельдшеров Святослав																																			
22. Чибрикин Тимофей																																			
	1	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	7	8	8	9	9	9	10	11	11	12	12	12	13	14	15	16	17			