Выпуклые функции

Определение 1. Функция $f : I \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на промежутке I, если на каждом отрезке $[x_1; x_2] \subseteq I$ график функции f лежит не выше графика прямой L, соединяющей точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$, то есть $f(x) \leqslant L(x)$ при любом $x \in [x_1; x_2]$. Аналогично вводится понятие выпуклости вверх.

Задача 1. Пусть функция f определена на интервале (a, b). Докажите, что f выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:
а) $\alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y) \geqslant f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y)$ для любых $x, y \in (a, b)$ и любого $\alpha \in [0, 1]$;
б) надграфик f на $(a; b)$, то есть $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b), y \geqslant f(x)\}$ — выпуклое множество;
в) *(неравенство Йенсена)* $\frac{\alpha_1 f(x_1)+\dots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\dots+\alpha_n} \geqslant f\left(\frac{\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\right)$ для любых чисел $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ и любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$?
г)* $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для любых x_1, x_2 из $(a; b)$ в случае непрерывной на $(a; b)$ функции f.

Задача 2. Докажите, что **а)** $\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}$; **б)** $(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$.

Задача 3. Пусть f положительна и выпукла вниз на $[a; b]$. Обязательно ли $1/f$ выпукла вверх на $[a; b]$?

Задача 4. Пусть функция f определена и два раза дифференцируема на интервале (a, b). Докажите, что f выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:
а) f' монотонно неубывает на интервале (a, b); **б)** $f''(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a, b)$;
в) любая касательная l к графику f расположена не выше его: $f(x) \geqslant l(x)$ при всех $x \in (a, b)$;

Задача 5. Найдите промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз следующих функций:
а) $\sin x$; **б)** x^3; **в)** x^4; **г)** $\sqrt{|x|}$; **д)** $5x^4 + 7x^3$; **е)** $\sin x + \cos x$; **ж)** $(x(x-1))^{-1}$; **з)** $x^2 + \frac{1}{x}$.

Задача 6. Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2 + \sqrt[3]{7}$?

Точки перегиба

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что f выпукла вниз на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и выпукла вверх на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (или наоборот).

Задача 7. Пусть f дважды дифференцируема (т. е. f и f' дифференцируемы) в некой окрестности точки x_0.
а) Пусть x_0 — точка перегиба функции f. Верно ли, что $f''(x_0) = 0$? Верно ли обратное?
б) Докажите, что x_0 — точка перегиба f если и только если f'' меняет знак в точке x_0.

Задача 8. Нарисуйте графики функций из задачи 5 и найдите точки перегиба этих функций.

Задача 9. Пусть f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причём $f'(x_0) = 0$ и
а) $f''(x_0) > 0$; **б)** $f''(x_0) < 0$. Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

Задача 10. Сколько перегибов у графика $y = (x + 1)/(x^2 + 1)$? Лежат ли они на одной прямой?

Асимптоты

Определение 3. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to +\infty$. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$.

Задача 11. Дайте определение асимптот графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to x_0 + 0$.

Задача 12. Пусть график $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$. Найдите $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$.

Задача 13. Пусть существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = 1$. Обязательно ли тогда функция $f(x)$ имеет асимптоту?

Задача 14. Постройте (с полным исследованием) графики следующих функций:
а) $x + \frac{1}{x}$; **б)** $\frac{x+3}{2-x}$; **в)** $\sqrt{x(1+x)}$; **г)** $x \operatorname{arctg} x$; **д)** $\frac{x}{(x+1)^2}$; **е)** $\sqrt[3]{9 - x^3}$; **ж)** $\frac{x^3}{1-x^2}$; **з)*** $\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

Разное

Задача 15. Докажите, что если выпуклая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена, то она постоянна.

Задача 16. Любая ли выпуклая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в каждой точке правую и левую касательные?

Задача 17*. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция на отрезке $[0, a]$, $f(0) = f(a) = 0$ и f'' непрерывна на отрезке $[0, a]$. **а)** Докажите, что при $a = \pi$ справедливо утверждение: «существует такая точка $\xi \in (0, a)$, что $f''(\xi) + f(\xi) = 0$». **б)** Верно ли утверждение предыдущего пункта для $a = 3$?

Задача 18*. Пусть $P(x)$ — многочлен ненулевой степени, разлагающийся на линейные множители с действительными коэффициентами, причём $P'(0) = P''(0) = 0$. Докажите, что $P(0) = 0$.

Задача 19.** Функция f определена и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, обозначим $f^{(n)}$ ее n-тую производную. Пусть для каждого $a \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(a) = 0$. Докажите, что f — многочлен.

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	5 ж	5 з	6	7 а	7 б	8	9 а	9 б	10	11	12	13	14 а	14 б	14 в	14 г	14 д	14 е	14 ж	14 з	15	16	17 а	17 б	18	19