Определение производной.

Определение 1. Пусть функция f определена на некотором интервале, и пусть точка x_0 принадлежит этому интервалу. *Производной функции f в точке x_0* называется число $f'(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, в случае, если этот предел существует (тогда говорят, что функция f *дифференцируема* в точке x_0).

Задача 1. Докажите, что $f'(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$.

Задача 2. Для каждой точки $a \in \mathbb{R}$ найдите $f'(a)$, если **а)** $f(x) = c$, где $c \in \mathbb{R}$; **б)** $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

Задача 3°. Докажите, что $f'(x_0) = A$ тогда и только тогда, когда найдётся такая функция $\beta(t)$, что для всех достаточно малых t будет верно $f(x_0 + t) = f(x_0) + At + \beta(t)$, причём $\lim\limits_{t\to 0} \beta(t)/t = 0$.

Задача 4. Верно ли, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в этой точке?

Определение 2. Говорят, что функция f *дифференцируема* на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. При этом её *производной* называется функция $f' : x \mapsto f'(x)$.

Задача 5. Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $|x|$; **б)** $\frac{1}{x}$; **в)** $\sqrt{x}$; **г)** $x^{3/2}$.

Задача 6. Автомобиль едет по прямой дороге так, что в каждый момент времени t он находится в точке с координатой $s(t)$. Что будет показывать спидометр автомобиля в момент времени t_0?

Вычисление производных

Задача 7°. Пусть функции f и g дифференцируемы на некотором интервале. Докажите, что
а) функция $f + g$ тоже дифференцируема на этом интервале и $(f + g)' = f' + g'$;
б) для любой константы C функция Cf тоже дифференцируема на этом интервале и $(Cf)' = Cf'$;
в) функция fg тоже дифференцируема на этом интервале и $(fg)' = f'g + fg'$;
г) функция f/g дифференцируема во всех точках интервала, где $g(x) \neq 0$, и $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

Задача 8. Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$; **б)** $\frac{5x+6}{7x+8}$; **в)** $\frac{1}{x^3-5x-2}$. **г)** $\sin x$; **д)** $\cos x$; **е)** $\operatorname{tg} x$; **ж)** $\operatorname{ctg} x$; **з)** $x^{m/n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; **и)*** e^x.

Задача 9°. Пусть $F(x) = f(g(x))$. Докажите, что если g дифференцируема в точке x_0, а f дифференцируема в точке $g(x_0)$, то $F(x)$ дифференцируема в точке x_0, и $F'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Задача 10°. **а)** Пусть функция f на некотором интервале непрерывна и имеет обратную функцию g. Докажите, что если f дифференцируема в точке x_0 из этого интервала и $f'(x_0) \neq 0$, то g дифференцируема в точке $f(x_0)$ и $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. **б)** Каков геометрический смысл формулы из пункта а)?

Задача 11. Продифференцируйте: **а)** $\sin(x^2)$; **б)** $\arcsin x$; **в)** $\arccos x$; **г)** $\operatorname{arctg} x$; **д)*** $\ln x$; **е)*** 2^x; **ж)*** x^α.

Задача 12°. **а)** Докажите, что при дифференцировании кратность корня многочлена понижается на 1.
б) Докажите, что многочлен из $\mathbb{R}[x]$ имеет кратный действительный корень тогда и только тогда, когда он имеет общий действительный корень со своей производной.
в) Может ли многочлен из $\mathbb{Q}[x]$, неприводимый над $\mathbb{Q}$, иметь кратный комплексный корень?

Касательная

Определение 3. Пусть функция f определена в некоторой окрестности U точки x_0. Для каждой точки $x \in U$, $x \neq x_0$, рассмотрим прямую $l(x)$, проходящую через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$. Если существует предельная прямая для семейства прямых $l(x)$ при $x \to x_0$, то она называется *касательной* к графику f в точке x_0.

Задача 13°. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Задача 14. Под каким углом пересекаются кривые: **а)** $y = x^2$ и $x = y^2$; **б)** $y = \sin x$ и $y = \cos x$?

Задача 15. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола $y = x^2$ видна под прямым углом.

Задача 16. Докажите, что отрезок любой касательной к графику функции $y = 1/x$, концы которого расположены на осях координат, делится точкой касания пополам.

Задача 17*. Параллельный пучок лучей, падающий на параболу $y = x^2$ по вертикали сверху, отражается от неё по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что все лучи этого пучка после первого отражения пройдут через одну и ту же точку, и найдите эту точку.

Задача 18*. Дана гипербола с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что поток лучей от точечного источника света в F_1, отразившись от гиперболы, предстанет стороннему наблюдателю как поток лучей от точечного источника в F_2.

Задача 19*. Существует ли окружность, пересекающая параболу $y = x^2$ ровно в двух точках, причём в одной из этих точек у параболы и окружности есть общая касательная, а в другой — нет?

1	2 а	2 б	3	4	5 а	5 б	5 в	5 г	6	7 а	7 б	7 в	7 г	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	8 е	8 ж	8 з	8 и	9	10 а	10 б	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	12 а	12 б	12 в	13	14 а	14 б	15	16	17	18	19