Определение 1. (Предел функции по Гейне) Пусть функция f определена в окрестности $\mathcal{U}$ точки a кроме, быть может, самой точки a. Число b называется пределом f в точке a, если для каждой сходящейся к a последовательности (x_n), элементы которой отличны от a и принадлежат $\mathcal{U}$, верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Обозначения: $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$ («$f(x)$ стремится к b при x, стремящемся к a»).

Задача 1. **а)** Зависит ли определение 1 от выбора окрестности $\mathcal{U}$? **б)** Влияет ли значение f в точке a на существование предела f в a и его значение? **в)** Может ли функция иметь два предела в точке?

Задача 2. Дайте определение того, что функция f не имеет предела в точке a.

Задача 3. Докажите, что f непрерывна в точке a если и только если её предел в точке a равен $f(a)$.

Задача 4. Дайте определение предела функции по аналогии с определением 1 из листка 24.

Задача 5. Найдите следующие пределы (если они существуют):
а) $\lim\limits_{x\to 1}\{x\}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1}[x]$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+9x}{x-3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$; **е)*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Задача 6. Дайте определение **а)** предела функции при $x \to +\infty$;
б) того, что $f(x)$ стремится к $+\infty$, при $x \to a$ (где $a \in \mathbb{R}$ или $a = +\infty$).

Задача 7. Найдите пределы (если они существуют) при $x \to +\infty$ функций из задачи 5, а)–д).

Задача 8. Сформулируйте и докажите **а)** теоремы о пределе суммы, разности, произведения и отношения двух функций; **б)** «принцип двух милиционеров» для функций

Задача 9. Найдите пределы при $x \to \pm\infty$ функции $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены.

Задача 10. **а)** Пусть функции f и g определены на $\mathbb{R}$, причём $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to A} g(x) = B$. Обязательно ли тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$? **б)** А если $g(A) = B$?

Задача 11. Докажите неравенства: **а)** $\sin x < x$ при $x > 0$; **б)** $x < \mathrm{tg}x$ при $0 < x < \pi/2$.

Задача 12. (*Первый «замечательный» предел*) Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 13. Найдите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; **г)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$; **д)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{x}$.

Задача 14. Найдите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \in \mathbb{N})$; **в)*** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Задача 15. Докажите, что: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; **б)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;

Задача 16. (*Второй «замечательный» предел*) Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Задача 17. Определите предел слева (справа) функции f в точке a ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$).

Задача 18. Приведите пример функции, которая в точке a **а)** имеет разные пределы слева и справа; **б)** имеет предел слева, но не имеет предела справа; **в)** не имеет предела ни справа, ни слева.

Задача 19. Докажите, что функция, **а)** непрерывная на некотором интервале; **б)** монотонная на некотором интервале, имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

Задача 20. Докажите, что монотонная функция, определённая на отрезке, непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением не более чем счётного числа точек.

Задача 21*. (*М. Прасолов*) Пусть функция f определена на отрезке (или на $\mathbb{R}$) и в каждой точке этого отрезка ($\mathbb{R}$) имеет конечный предел, не обязательно совпадающий со значением в точке. Насколько f может отличаться от непрерывной? Более точно, каким может быть у f множество точек разрыва?

Задача 22*. Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$, не равной тождественно нулю ни на каком интервале, но имеющей в каждой точке нулевой предел.

Задача 23*. Может ли функция, определенная на $\mathbb{R}$, иметь в каждой точке бесконечный предел?

1 а	1 б	1 в	2	3	4	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	16	17	18 а	18 б	18 в	19 а	19 б	20	21	22	23

Листок №25 Предел функции 04.2012

	Фамилия, Имя	1 а	1 б	1 в	2	3	4	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е *	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	14 а	14 б	14 в *	15 а	15 б	16	17	18 а	18 б	18 в	19 а	19 б	20	21 *	22 *	23 *
1.	Андреев Валентин																																											
2.	Большаков Иван																																											
3.	Гайворонский Андрей																																											
4.	Говорухин Ярослав																																											
5.	Дегтярев Федор																																											
6.	Денисенко Анна																																											
7.	Зайцев Андрей																																											
8.	Карпов Андрей																																											
9.	Константиновский Никита																																											
10.	Левинсон Татьяна																																											
11.	Луценко Михаил																																											
12.	Мирошниченко Вероника																																											
13.	Нагайко Иван																																											
14.	Назаров Борис																																											
15.	Парубченко Александр																																											
16.	Перунов Иван																																											
17.	Пчелина Дарья																																											
18.	Рудько Юрий																																											
19.	Скурида Василий																																											
20.	Смык Екатерина																																											
21.	Фельдшеров Святослав																																											
22.	Чибрикин Тимофей																																											
		а 1	б 1	в 1	2	3	4	а 5	б 5	в 5	г 5	д 5	е 5	а 6	б 6	7	а 8	б 8	9	а 10	б 10	а 11	б 11	12	а 13	б 13	в 13	г 13	д 13	а 14	б 14	в 14	а 15	б 15	16	17	а 18	б 18	в 18	а 19	б 19	20	21	22	23