**Определение 1.** (Непрерывность по Коши́.) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке $a \in M$,* если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что будет верно утверждение: *для каждого $x$ из $M$, такого что $|x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.* Обозначение: $f \in C(a)$.

**Задача 1.** Запишите без отрицаний: «$f : M \to \mathbb{R}$ *разрывна* (т. е. не является непрерывной) в точке $a \in M$».

**Задача 2.** Укажите множество точек непрерывности функций: **а)** $x$; **б)** $\operatorname{sgn} x$; **в)** $x^2$; **г)** $\{x\}$; **д)** $\frac{1}{x}$; **е)** $\sqrt{x}$. (Как обычно, функцию, заданную формулой, мы считаем определённой всюду, где эта формула имеет смысл.)

**Задача 3.** Будет ли функция, непрерывная в точке $a$, ограниченной в некоторой окрестности точки $a$?

**Задача 4.** Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$, причём $f(a) > 0$. Докажите, что существует такая окрестность $U$ точки $a$, что $f$ положительна на множестве $U \cap M$.

**Задача 5.** Какие функции будут «непрерывными», если в определении 1 забыть, что **а)** $\varepsilon > 0$; **б)** $\delta > 0$?

**Определение 2.** (Непрерывность по Ге́йне.) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке $a \in M$,* если для каждой сходящейся к $a$ последовательности $(x_n)$, все элементы которой принадлежат $M$, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Обозначение: $f \in C(a)$.

**Задача 6.** Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

**Задача 7.** Функции $f, g$ непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}$. Докажите: **а)** $|f| \in C(a)$; **б)** $f \pm g \in C(a)$; **в)** $f \cdot g \in C(a)$; **г)** если $g(a) \neq 0$, то функция $f/g$ определена в некоторой окрестности точки $a$ и непрерывна в точке $a$.

**Задача 8.** Докажите непрерывность функции (во всех точках её области определения): **а)** $x^n$, где $n \in \mathbb{N}$; **б)** многочлен из $\mathbb{R}[x]$; **в)** $P(x)/Q(x)$, где $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq 0$; **г)** $\sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$; **д)** $\sin x$; **е)** $\cos x$; **ж)** $\operatorname{tg} x$.

**Задача 9.** Придумайте функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **а)** всюду разрывную; **б)** непрерывную лишь в одной точке; **в)** разрывную в точках вида $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, и только в них; **г)*** разрывную в точках из $\mathbb{Q}$ и только в них.

**Задача 10*.** Существует ли функция, которая на каждом отрезке принимает все действительные значения?

### Основные теоремы

**Определение 3.** Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ (например, $M$ — отрезок или вся прямая). Говорят, что функция $f : M \to \mathbb{R}$ *непрерывна на $M$,* если $f$ непрерывна в каждой точке $a \in M$. Обозначение: $f \in C(M)$.
Говорят, что $f : M \to \mathbb{R}$ *ограничена на $M$*, если найдётся такое число $k$, что $|f(x)| < k$ при всех $x \in M$.

**Задача 11.** **а)** Пусть $f \in C([a; b])$, причём $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Найдётся ли такое $\gamma \in (a, b)$, что $f(\gamma) = 0$? **б)** (Теорема о промежуточном значении). Пусть $f \in C([a; b])$, причём $f(a) < f(b)$. Докажите, что для любого $k \in [f(a), f(b)]$ найдётся такая точка $\gamma \in [a, b]$, что $f(\gamma) = k$.

**Задача 12.** Докажите, что любой многочлен нечётной степени из $\mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один корень из $\mathbb{R}$.

**Задача 13.** (Теорема Л. Бра́уэра о неподвижной точке для отрезка). Пусть $f \in C([0; 1])$ и все значения функции $f$ содержатся в отрезке $[0; 1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

**Задача 14.** Функция непрерывна на отрезке. Всегда ли она на этом отрезке **а)** ограничена; **б)** достигает своего наибольшего и наименьшего значений? **в)** Та же задача, но отрезок заменен на интервал; прямую.

**Задача 15.** Каким может быть множество значений непрерывной функции на отрезке; интервале; прямой?

**Задача 16.** Функция $f$ непрерывна на отрезке $I \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что $f$ обратима на $I$ если и только если $f$ строго монотонна на $I$, причём функция $f^{-1}$ строго монотонна и непрерывна (на отрезке $[\min\limits_{x\in I} f(x); \max\limits_{x\in I} f(x)]$).

**Задача 17.** Докажите непрерывность $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ (на их области определения).

**Задача 18.** Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}$, и функции $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ непрерывны. Докажите, что $g \circ f \in C(A)$.

**Задача 19.** Функции $f$ и $g$ непрерывны на $\mathbb{R}$, причём $f(x) = g(x)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $f = g$.

**Задача 20.** Найдите все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции $f$, такие что $f(x+y) = f(x)+f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

**Определение 4.** Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной на $M$*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любой пары точек $x, y \in M$, таких что $|x - y| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

**Задача 21.** Функция $f$ равномерно непрерывна на множестве $M \subseteq \mathbb{R}$. Обязательно ли тогда $f \in C(M)$?

**Задача 22.** Какие из функций $x^2$, $\sqrt{x}$, $1/x$ равномерно непрерывны **а)** на луче $[1; \infty)$; **б)** на интервале $(0; 1)$? **в)** (Теорема Ка́нтора). Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём.

| 1 | 2 а | 2 б | 2 в | 2 г | 2 д | 2 е | 3 | 4 | 5 а | 5 б | 6 | 7 а | 7 б | 7 в | 7 г | 8 а | 8 б | 8 в | 8 г | 8 д | 8 е | 8 ж | 9 а | 9 б | 9 в | 9 г | 10 | 11 а | 11 б | 12 | 13 | 14 а | 14 б | 14 в | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 а | 22 б | 22 в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Листок №24 Непрерывность 02.2012

| | Фамилия, Имя | 1 | 2 а | 2 б | 2 в | 2 г | 2 д | 2 е | 3 | 4 | 5 а | 5 б | 6 | 7 а | 7 б | 7 в | 7 г | 8 а | 8 б | 8 в | 8 г | 8 д | 8 е | 8 ж | 9 а | 9 б | 9 в | 9 г * | 10 * | 11 а | 11 б | 12 | 13 | 14 а | 14 б | 14 в | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 а | 22 б | 22 в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Андреев Валентин | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | Большаков Иван | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | Гайворонский Андрей | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | Говорухин Ярослав | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5. | Дегтярев Федор | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6. | Денисенко Анна | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7. | Зайцев Андрей | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8. | Карпов Андрей | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9. | Константиновский Никита | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10. | Левинсон Татьяна | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11. | Луценко Михаил | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12. | Мирошниченко Вероника | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13. | Нагайко Иван | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14. | Назаров Борис | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15. | Парубченко Александр | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16. | Перунов Иван | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17. | Пчелина Дарья | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18. | Рудько Юрий | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19. | Скурида Василий | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20. | Смык Екатерина | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21. | Фельдшеров Святослав | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22. | Чибрикин Тимофей | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 1 | а 2 | б 2 | в 2 | г 2 | д 2 | е 2 | 3 | 4 | а 5 | б 5 | 6 | а 7 | б 7 | в 7 | г 7 | а 8 | б 8 | в 8 | г 8 | д 8 | е 8 | ж 8 | а 9 | б 9 | в 9 | г 9 | 10 | а 11 | б 11 | 12 | 13 | а 14 | б 14 | в 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | а 22 | б 22 | в 22 |