Определение 1. *Компле́ксное число* z — это выражение вида $z = a + bi$, где a и b — числа из $\mathbb{R}$, а i — *мнимая единица*. По определению $i^2 = -1$. Число a называют *вещественной частью* z (пишется $a = \mathrm{Re}\,(z)$), а число b — *мнимой частью* z (пишется $b = \mathrm{Im}\,(z)$). Комплексные числа можно складывать и умножать, «раскрывая скобки и приводя подобные». Множество комплексных чисел обозначают буквой $\mathbb{C}$.

Задача 1. Напишите формулы для вещественной и мнимой части суммы и произведения чисел $a+bi$ и $c+di$.

Определение 2. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ сопоставим точку (a, b) и вектор (a, b). Длина этого вектора называется *модулем* числа z и обозначается $|z|$. Пусть $z \neq 0$. Угол (в радианах), отсчитанный против часовой стрелки от вектора $(1, 0)$ до вектора (a, b), называется *аргументом* числа z и обозначается $\mathrm{Arg}\,(z)$. Аргумент определен с точностью до прибавления числа вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Каков геометрический смысл суммы комплексных чисел? Сравните $|z + w|$ и $|z| + |w|$ для $z, w \in \mathbb{C}$.

Задача 3. Найдите модуль и аргумент чисел: **а)** -4, $\quad 1+i$, $\quad 1-i\sqrt{3}$, $\quad \sin\alpha + i\cos\alpha$; **б)** $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

Задача 4. (*Тригонометрическая форма записи*) Докажите, что для любого ненулевого комплексного числа z имеет место равенство $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \mathrm{Arg}\,(z)$.

Задача 5. Рассмотрим умножение точек комплексной плоскости на $\cos\varphi + i\sin\varphi$ как преобразование этой плоскости ($z \longmapsto (\cos\varphi + i\sin\varphi)z$). **а)** Куда при этом преобразовании перейдут точки действительной оси? **б)** А точки мнимой оси? **в)** Докажите, что это преобразование — поворот на угол φ. **г)** Пусть $z, w \in \mathbb{C}$. Выразите $|zw|$ и $\mathrm{Arg}\,(zw)$ через $|z|$, $|w|$, $\mathrm{Arg}\,(z)$, $\mathrm{Arg}\,(w)$. **д)** Выведите формулы для косинуса и синуса суммы.

Задача 6. Из любого ли комплексного числа можно извлечь квадратный корень? Решите уравнение $z^2 = i$.

Задача 7. Докажите, что если и m, и n записывается как сумма двух квадратов целых чисел, то и mn — тоже.

Задача 8. (*Формула Муавра*) Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Задача 9. Найдите суммы **а)** $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$; **б)** $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$; **в)** $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$.

Задача 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Выразите $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Определение 3. Пусть $z = a + bi$ (где $a, b \in \mathbb{R}$). Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно-сопряжённым* к z.

Задача 11. **а)** Выразите $|\overline{z}|$, $\mathrm{Arg}\,(\overline{z})$ через $|z|$, $\mathrm{Arg}\,(z)$. **б)** Что это за геометрическое преобразование: $z \longmapsto \overline{z}$?

Задача 12. Докажите: **а)** $|z|^2 = z\overline{z}$; **б)** $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; **в)** если $P \in \mathbb{R}[x]$ и $P(z) = 0$, то $P(\overline{z}) = 0$.

Задача 13. Определите деление комплексных чисел. Вычислите: **а)** $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; **б)** $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; **в)** $(1+i\sqrt{3})^{150}$.

Задача 14. Докажите, что многочлен степени n с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет не более n корней из $\mathbb{C}$.

Задача 15. **а)** Найдите и нарисуйте все комплексные корни многочленов z^2-1, z^3-1, z^4-1, z^5-1, z^6-1. **б)** Сколько комплексных корней имеет уравнение $z^n = 1$, где $n \in \mathbb{N}$? Найдите их сумму и произведение. **в)** Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все корни степени n из 1, $\alpha_1 = 1$. Найдите $\alpha_1^s + \ldots + \alpha_n^s$ (где $s \in \mathbb{N}$) и $(1-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha_n)$.

Задача 16. Пусть P — многочлен степени k с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Докажите, что среднее арифметическое значений P в вершинах правильного n-угольника равно значению P в центре многоугольника, если $n > k$.

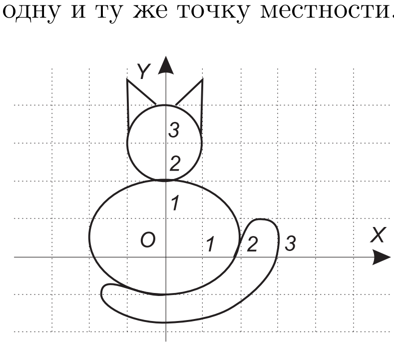
Задача 17*. Вершины правильного n-угольника покрашены в несколько цветов так, что точки одного цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников есть два равных.

Задача 18. **а)** Пусть $z = (3+4i)/5$. Найдётся ли такое $n \in \mathbb{N}$, что $z^n = 1$? **б)** Докажите, что $\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} \notin \mathbb{Q}$.

Задача 19. Нарисуйте: **а)** $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n + 1 = 0\}$; **б)** $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 \geqslant |z - i|\}$; **в)** $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} = 1\}$; **г)** $\{\frac{1+ti}{1-ti} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Задача 20. Пусть карты из задачи 17 листка 22 лежат на комплексной плоскости. Докажите, что найдутся такие $q, b \in \mathbb{C}$, что если $z \in \mathbb{C}$ — любая точка на первой карте, то этой же точкой местности на второй карте будет точка $qz + b$. Выразите с помощью q и b точку, изображающую на картах одну и ту же точку местности.

Задача 21. Запишите как функцию комплексной переменной **а)** симметрию относительно оси y; **б)** ортогональную проекцию на ось x; **в)** центральную симметрию с центром A; **г)** поворот на угол φ относительно точки A; **д)** гомотетию с коэффициентом k и центром A; **е)** симметрию относительно прямой $y = 3$ со сдвигом на 1 влево; **ж)** поворот, переводящий ось x в прямую $y = 2x + 1$; **з)** симметрию относительно прямой $y = 2x + 1$.



Задача 22. Куда отображение $z \longmapsto z^2$ переводит **а)** декартову координатную сетку; **б)** полярную координатную сетку; **в)** окружность $|z + i| = 1$; **г)** кошку (см. рис. справа)? **д)** Те же вопросы для отображения $z \longmapsto 1/z$.

Задача 23. Куда отображение **а)** $z \longmapsto 1/z$; **б)*** $z \longmapsto 0,5(z + 1/z)$ переводит $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0,\ |z| \leqslant 1\}$?

1	2	3 а	3 б	4	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	6	7	8	9 а	9 б	9 в	10	11 а	11 б	12 а	12 б	12 в	13 а	13 б	13 в	14	15 а	15 б	15 в	16	17	18 а	18 б	19 а	19 б	19 в	19 г	20	21 а	21 б	21 в	21 г	21 д	21 е	21 ж	21 з	22 а	22 б	22 в	22 г	22 д	23 а	23 б