Определение 1. Пусть дано подмножество M множества действительных чисел $\mathbb{R}$.
Число $c \in \mathbb{R}$ называют *верхней гранью* множества M, если $c \geqslant m$ для всех $m \in M$.
Число $c \in \mathbb{R}$ называют *точной верхней гранью* множества M, если c является верхней гранью M, но никакое меньшее число не является верхней гранью M. Обозначение: $\sup M$ (читается «супре́мум» M).
Аналогично определяется точная нижняя грань множества ($\inf M$, «инфи́мум» M).

Задача 1. Докажите, что число c есть $\sup M$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:
1) для всех $x \in M$ верно, что $x \leqslant c$; 2) для любого числа $c_1 < c$ найдётся такое $x \in M$, что $x > c_1$.

Задача 2. Может ли у множества быть несколько точных верхних (нижних) граней?

Задача 3. Найдите $\sup M$ и $\inf M$, если **а)** $M = \{a^2 + 2a \mid -5 < a \leqslant 5\}$. **б)** $M = \{\pm n/(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 4. Пусть A и B — некоторые подмножества $\mathbb{R}$, и пусть известны $\sup A$ и $\sup B$.
а) Найдите $\sup(A \cup B)$. **б)** Найдите $\sup(A + B)$, где $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
в) Найдите $\inf(A \cdot B)$, где $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$, если A и B состоят из отрицательных чисел.

Аксиома полноты. *Всякое ограниченное сверху непустое подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.*

Задача 5. Каждое ли ограниченное снизу непустое подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань?

Задача 6. (*Принцип вложенных отрезков*) Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков. Докажите, что **а)** у отрезков есть общая точка; **б)** если $\lim\limits_{i\to\infty}(b_i - a_i) = 0$, то общая точка одна.

Задача 7. **а)** Любая ли последовательность $(a_1, b_1) \supseteq (a_2, b_2) \supseteq \ldots$ вложенных интервалов имеет непустое пересечение? **б)** А если известно, что и (a_n), и (b_n) содержат бесконечно много различных элементов?

Задача 8. На прямой дано некоторое множество отрезков. Известно, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

Задача 9. **а)** (*Компактность отрезка*) Отрезок покрыт системой интервалов. Всегда ли можно выбрать из системы конечное число интервалов, покрывающих отрезок? **б)** А если заменить отрезок на интервал?

Задача 10. (*Теорема Вейерштрасса*) Докажите, что любая неубывающая ограниченная сверху последовательность действительных чисел имеет предел.

Задача 11. Найдите пределы последовательностей: **а)** $x_1 = 2$, $x_{n+1} = (x_n + 1)/2$; **б)** $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $y_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\ldots$; **в)** $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $z_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, $\ldots$; **г)*** $t_1 = 1$, $t_{n+1} = 1/(1 + t_n)$.

Задача 12. Пусть $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/S_n$, где **а)** $S_n = a_n$; **б)*** $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Ограничена ли (a_n)?

Задача 13. Докажите, что последовательность $x_n = 1 - 1/2 + 1/3 - \ldots + (-1)^{n+1}/n$ имеет предел.

Задача 14. (*Число Эйлера*) Докажите, что **а)** существует $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ (его обозначают буквой e);
б) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + k/n)^n = e^k$ при любом $k \in \mathbb{N}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n = 1/e$; **г)** $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/1! + 1/2! + \cdots + 1/n!)$.

Задача 15. (*Вычисление квадратного корня методом последовательных приближений*) Пусть $a > 0$. Возьмем любое $x_1 > 0$ и построим последовательность (x_n) по закону: $x_{n+1} = 0,5 \cdot (x_n + a/x_n)$ при $n \in \mathbb{N}$.
а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. **б)*** Для $a = 10$ найдите n, при котором $|x_n - \sqrt{10}| < 0,0001$, если $x_0 = 3$.

Задача 16. (*Критерий Коши*) Докажите, что последовательность (x_n) *сходится* (то есть имеет предел) тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \geqslant k \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Задача 17*. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба (меньшая карта целиком лежит внутри большей). Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

Задача 18. По кругу сидят n ребят, у каждого по тарелке каши. Каждую минуту одновременно каждый из ребят берет себе по половине каши своих соседей. Сначала в тарелках было $1, 2, \ldots, n$ поварешек каши. Сколько каши будет в тарелках спустя достаточно долгое время, если **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)*** $n \in \mathbb{N}$?
г)* А если ребята сидят в вершинах графа и ежеминутно каждый делит свою кашу поровну между соседями?

Задача 19*. **а)** Пусть $c = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \text{ и } q^2 < 2\}$. Докажите, что $c^2 = 2$.
б) Для любого $a \geqslant 0$ и любого $r \in \mathbb{Q}$ определите число a^r, докажите его существование и единственность.

Задача 20. Докажите, что любая последовательность имеет монотонную подпоследовательность.

Задача 21. Докажите, что любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

1	2	3 а	3 б	4 а	4 б	4 в	5	6 а	6 б	7 а	7 б	8	9 а	9 б	10	11 а	11 б	11 в	11 г	12 а	12 б	13	14 а	14 б	14 в	14 г	15 а	15 б	16	17	18 а	18 б	18 в	18 г	19 а	19 б	20	21