Задача 1. В два сосуда разлили (не поровну) 1 л воды. Из 1-го сосуда перелили половину имеющейся в нём воды во 2-ой, затем из 2-го перелили половину оказавшейся в нём воды в 1-ый, снова из 1-го перелили половину во 2-ой, и т. д. Сколько воды (с точностью до 1 мл) будет в 1-ом сосуде после 50 переливаний?

Определение 1. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если (x_n) можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, что (x_n) *стремится к a при n, стремящемся к бесконечности* (и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$).

Задача 2. Может ли последовательность иметь более одного предела?

Задача 3. Найдите предел (x_n) (если он существует): **а)** $x_n = 1 + (-0,1)^n$; **б)** $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; **в)** $x_n = (-1)^n$; **г)** $x_n = (2^n-1)/(2^n+1)$; **д)** $x_n = 1+0,1+\ldots+(0,1)^n$; **е)** $x_n = (1+3+\ldots+3^n)/5^n$; **ж)** $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Определение 2. *Окрестностью* точки a называют любой интервал, содержащий точку a. Обозначение: $\mathcal{U}(a)$.

Задача 4. Докажите, что любые две точки на прямой имеют непересекающиеся окрестности.

Определение 3. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если в любой окрестности числа a содержатся *почти все* члены (x_n) (то есть все, кроме конечного числа).

Определение 4. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $k > N$ будет выполнено неравенство $|x_k - a| < \varepsilon$.

Задача 5. Докажите эквивалентность определений 1, 3 и 4.

Задача 6. Запишите, не используя отрицания: **а)** «число a не предел (x_n)»; **б)** «(x_n) не имеет предела».

Задача 7. Предел (x_n) больше 0. Верно ли, что **а)** $x_n > 0$ при $n \gg 0$; **б)** $(1/x_n)$ ограничена (если определена)?

Задача 8. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Найти **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm y_n$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$. **в)** Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n$?

Задача 9. Найти предел при $n \to \infty$, если он есть **а)** $1+q+\ldots+q^n$; **б)** $(n^2-n+1)/n^2$; **в)** C_n^{50}/n^{50}; **г)** $n^{50}/2^n$; **д)** $\sqrt[n]{2^n+3^n}$; **е)** $\sqrt[n]{n}$; **ж)** $1/2 + 2/2^2 + 3/2^3 + \ldots + n/2^n$; **з)** f_n/f_{n+1}, где f_n — n-е число Фибоначчи.

Задача 10. Может ли последовательность иметь предел, не имея ни наименьшего, ни наибольшего членов?

Задача 11. **а)** Пусть (x_n) имеет предел. Докажите, что $(x_{n+1}-x_n)$ бесконечно малая. **б)** Верно ли обратное?

Задача 12. Последовательность (x_n) с положительными членами такова, что последовательность (x_{n+1}/x_n) имеет пределом некоторое число, меньшее 1. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

Задача 13. Найдите: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} 4n^2/(n^2+n+1)$ **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+2n-2)/(n^3+n)$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} (n^9-n^4+1)/(2n^9+7n-5)$.

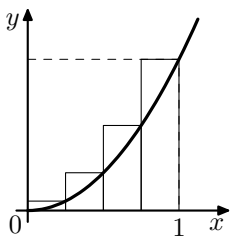
Задача 14. Найдите ошибку в рассуждении: «Пусть $x_n = (n-1)/n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1-1/n) = 1$. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1/n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (n-1) = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (n-1) = 0$. Отсюда $0 = 1$.»

Задача 15. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $x_n > y_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что **а)** $a > b$; **б)** $a \geqslant b$?

Задача 16. Обобщите теорему о двух милиционерах (см. листок 20) на последовательности, имеющие предел.

Задача 17. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Найти **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2}{7}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n}$; **г)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Задача 18. **а)** Дана фигура, ограниченная графиком функции $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на n равных частей и построим на каждой части прямоугольник так, чтобы его правая верхняя вершина лежала на графике (см. рис. справа). Сумму площадей прямоугольников обозначим S_n. Найдите предел (S_n) при $n \to \infty$.



б) Построим прямоугольники так, чтобы их левые верхние вершины лежали на графике. Сумму их площадей обозначим s_n. Докажите, что (s_n) стремится к тому же числу, что и (S_n) (его естественно считать *площадью* нашей фигуры).

в)* Решите ту же задачу для функции $y = x^k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Задача 19. Издавна жители островов Чунга и Чанга раз в год меняются драгоценностями. Одновременно жители Чунги привозят половину своих драгоценностей на Чангу, а жители Чанги треть своих драгоценностей на Чунгу. Какая часть драгоценностей находится на каждом острове? (Общий набор драгоценностей постоянен.)

Задача 20. Дано m последовательностей, сумма которых стремится к $m\alpha$, и сумма квадратов которых стремится к $m\alpha^2$. Докажите, что каждая из этих последовательность стремится к α.

Задача 21. Петя шел из дома в школу. На полпути он решил, что лучше пойти в кино, и свернул к кинотеатру. На полпути туда он захотел покататься на коньках и пошел на каток. На полпути к катку он подумал, что надо учиться, и повернул к школе. Но на полпути к ней снова свернул к кинотеатру, и т. д. Куда придёт Петя?

1	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	3 ж	4	5	6 а	6 б	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	9 а	9 б	9 в	9 г	9 д	9 е	9 ж	9 з	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	13 в	14	15 а	15 б	16	17 а	17 б	17 в	17 г	18 а	18 б	18 в	19	20	21