Определение 1. Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху,* если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $x_n < C$.

Задача 1. **а)** Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.
б) Докажите, что (x_n) *ограничена* (т. е. ограничена и сверху и снизу) тогда и только тогда, когда найдётся такое число $C > 0$, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $|x_n| < C$.

Задача 2. Найдите ограниченную последовательность, у которой **а)** есть и наибольший, и наименьший член; **б)** есть наибольший, но нет наименьшего; **в)** есть наименьший, но нет наибольшего; **г)** нет ни наименьшего, ни наибольшего.

Задача 3. Найти наибольший член последовательности: **а)** $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; **б)** $y_n = \dfrac{n}{100+n^2}$; **в)** $z_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

Задача 4. Найти наименьший член последовательности: **а)** $x_n = n^2 - 5n + 1$; **б)** $y_n = n + 5\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Задача 5. Перепишите, не используя отрицания: «(x_n) не является ограниченной».

Задача 6. При каких q последовательность $x_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ является ограниченной?

Определение 2. Сумма последовательностей (x_n) и (y_n) — последовательность (z_n), где $z_n = x_n + y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично определяют разность, произведение, отношение двух последовательностей.

Задача 7. Верно ли, что **а)** сумма; **б)** разность; **в)** произведение; **г)** отношение ограниченных последовательностей — ограниченная последовательность?

Определение 3. Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой,* если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $n \geqslant N$ будет выполнено неравенство $|x_n| < \varepsilon$ (другими словами, для любого числа $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_n| < \varepsilon$ будет выполнено при всех натуральных $n \gg 0$).

Задача 8. Для последовательности (x_n) найдите по данному числу $\varepsilon > 0$ какой-нибудь номер N, начиная с которого верно, что $|x_n| < \varepsilon$, если **а)** $x_n = \dfrac{1}{n}$; **б)** $x_n = \dfrac{2}{n^3}$; **в)** $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$; **г)** $x_n = \dfrac{1}{2n^2+n}$.

Задача 9. Известно, что (x_n) и (y_n) бесконечно малые. Будет ли бесконечно малой последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$?

Задача 10. Докажите, что сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей бесконечно малая.

Задача 11. Последовательность $(x_n y_n)$ бесконечно малая. Верно ли, что одна из (x_n), (y_n) бесконечно малая?

Задача 12. (*Теорема о двух милиционерах*) Последовательности (x_n) и (y_n) бесконечно малые, а последовательность (z_n) такова, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ при $n \gg 0$. Докажите, что (z_n) бесконечно малая.

Задача 13. Является ли бесконечно малой последовательность **а)** $x_n = \dfrac{\cos n - 0,5^n}{n+7}$; **б)** $y_n = \dfrac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$?

Задача 14. Можно ли в определении 3 заменить слова «каждого $\varepsilon > 0$» на слова «каждого ε, где $1 > \varepsilon > 0$»?

Задача 15. Дана последовательность (x_n) с положительными членами. Верно ли, что (x_n) бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(\sqrt{x_n})$ бесконечно малая?

Задача 16. Даны две последовательности: (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — ограниченная. Докажите, что $(x_n + y_n)$ — ограниченная последовательность, а $(x_n y_n)$ — бесконечно малая последовательность.

Задача 17. В бесконечно малой последовательности (x_n) переставили члены (то есть взяли какое-то взаимно однозначное соответствие $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и получили новую последовательность (y_n), где $y_n = x_{f(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$). Обязательно ли полученная последовательность будет бесконечно малой?

Задача 18. Последовательность состоит из положительных членов, причем сумма любого количества её членов не превосходит 1. Докажите, что эта последовательность бесконечно малая.

Задача 19. Дана бесконечная вправо и вниз таблица. В каждой строчке записана бесконечно малая последовательность. Пусть x_n — произведение верхних n чисел n-го столбца. Верно ли, что (x_n) бесконечно малая?

Определение 4. Последовательность (x_n) называется *бесконечно большой,* если для любого числа $C > 0$ найдётся такое число k, что при всех натуральных n, больших k, будет верно неравенство $|x_n| > C$.

Задача 20. Последовательность не является ограниченной. Обязательно ли она бесконечно большая?

Задача 21. Запишите без отрицания: (x_n) не является **а)** бесконечно малой; **б)** бесконечно большой.

Задача 22. Какие из последовательностей ограничены, какие — бесконечно малые, а какие — бесконечно большие:
а) $x_n = (1,1)^n$; **б)** $y_n = (0,9)^n$; **в)** $z_n = \sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3}$; **г)** $t_n = \sqrt[n]{n!}$; **д)** $s_n = \dfrac{n^5+1}{n^4+n^2}$?

Задача 23. Верно ли, что последовательность (x_n) с ненулевыми членами бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(1/x_n)$ бесконечно большая?

Задача 24. Одна последовательность бесконечно большая, а другая бесконечно малая. Что можно сказать
а) о сумме; **б)** об отношении; **в)** о произведении этих последовательностей?

Задача 25. Любая ли последовательность является отношением двух **а)** ограниченных; **б)** бесконечно малых?

Задача 26. Есть ли последовательность, члены которой найдутся в любом интервале числовой оси?

Задача 27. Для каждого натурального n пусть x_n — сумма чисел вида $1/k$, где k — натуральное, $1 \leqslant k \leqslant n$ и в десятичной записи числа k нет цифры 9. Ограничена ли последовательность (x_n)?

| | | |