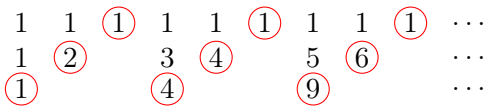
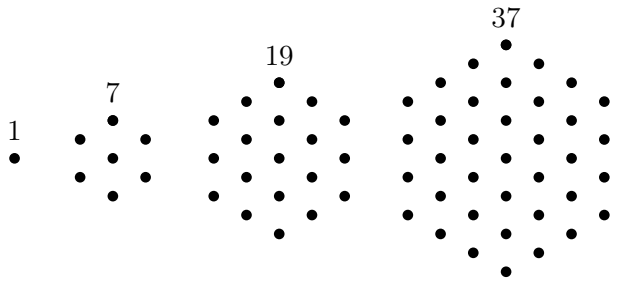
Задача 1. Выпишем строку единиц, обведем кружком каждую третью единицу. Под каждым необведенным числом a запишем сумму всех необведенных чисел первой строки от начала до a включительно. Получим вторую строку. В ней обведем кружком каждое второе число и аналогично построим третью строку (в ней все числа обведем кружком). Докажите, что она состоит из квадратов.



Задача 2. Картинка в задаче 1 разбивается на «треугольники», одна из сторон каждого треугольника состоит из трех обведенных в кружок чисел. Докажите, что числа на такой стороне у k-го треугольника — это коэффициенты многочлена $(x+k)^2$.

Задача 3. Выпишем строку единиц, обведем кружком каждую четвертую единицу. Затем аналогично задаче 1 получим следующую строку, в ней обведем каждое третье число, аналогично получим следующую строку и так далее. Докажите, что четвертая строка состоит из кубов.

Задача 4. В условиях задачи 3 докажите геометрически, что сумма нескольких первых необведенных чисел третьей строки (1, 7, 19, ...) всегда дает куб натурального числа. Подсказка изображена на рисунке справа.



Задача 5. Обобщите задачи 1 и 2 на случай, когда в первой строке обводится в кружок каждое n-е число.

Задача 6. Выпишем строку единиц и обведем в ней кружком единицы с номерами 1, 3, 6, 10, ... (треугольные числа). Аналогично задаче 1 образуем следующие строки, и в каждой обводим числа с номерами 1, 3, 6, 10, ... Докажите, что начальные числа строк дают последовательность факториалов.

Возможно, решить задачу 6 вам помогут следующее определение и задачи.

Определение 1. *Числом Стирлинга первого рода* называется количество способов разбить n человек на k хороводов (в хороводе может быть от одного до n человек). Обозначение: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Задача 7. Докажите, что $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$, $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ и $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$ при $1 \leqslant k \leqslant n$.

Задача 8. Выпишите числа Стирлинга $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ для $1 \leqslant k, n \leqslant 6$.

Задача 9. Докажите, что числа Стирлинга — это коэффициенты многочленов x, $x(x+1)$, $x(x+1)(x+2)$, ..., более точно: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ есть коэффициент при k-й степени многочлена $x(x+1)\dots(x+n-1)$.

Задача 10. Рисунок из задачи 6, как и раньше, разбивается на бесконечное число «треугольников», у каждого из которых одна сторона состоит из обведенных в кружок чисел (первый треугольник вырожденный — состоит всего из одной единицы).

а) Рассмотрим любое число a в n-ом треугольнике ($n > 2$). Сдвинем мысленно этот треугольник на предыдущий (так, чтобы вершины с единицей совпали). Пусть число a совместилось с числом b (возможно, с пустым местом), причем над b стоит число c, а слева от числа b стоит число d. Докажите, что $a = (n-1)c + d$.
(Не напоминает ли это рекуррентную формулу для чисел Стирлинга? Введите удобные обозначения.)

б) Докажите, что обведенные в кружок числа в задаче 6 — это числа Стирлинга.

в) Докажите, что обведенные числа у n-го треугольника — коэффициенты многочлена $(x+1)\dots(x+n-1)$.

г) Докажите, что числа, соседние слева с обведенными числами у n-го треугольника — коэффициенты многочлена $(x+2)\dots(x+n-1)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 а	10 б	10 в	10 г