Листок №17 Многочлены. Разложение на неприводимые множители 03.2011

Обозначение. Множества всех многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ обозначают соответственно $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.

Определение 1. Пусть A и B — многочлены, причем $\deg B > 0$. Разделить A на B с остатком значит найти такие многочлены Q и R, что $A = BQ + R$, где либо $R = 0$, либо $\deg R < \deg B$.

Задача 1. Разделите с остатком $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$.

Задача 2. **а)** Докажите, что деление многочленов с остатком всегда возможно.
б) Докажите, что при делении с остатком многочлены Q и R определяются однозначно.

Задача 3. (*Теорема Безу*) Докажите, что остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - a$ равен значению многочлена $A(x)$ при $x = a$.

Задача 4. **а)** Остаток от деления $A(x)$ на $x - 1$ равен 5, а на $x - 3$ равен 7. Найдите остаток от деления $A(x)$ на $(x-1)(x-3)$. **б)** Найдите остаток от деления x^{1000} на $x^2 + x - 1$.

Определение 2. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *приведённым.*

Определение 3. *Наибольшим общим делителем* двух многочленов A и B, хотя бы один из которых ненулевой, называют приведённый многочлен, который

1) делит и A, и B (то есть, является общим делителем A и B);

2) делится на любой общий делитель A и B.

Обозначение: НОД(A, B) или (A, B).

Задача 5. Однозначно ли определяется НОД двух многочленов?

Замечание. Из определения 3 не вполне ясно, почему НОД вообще существует. Задачи 6 и 7 проясняют этот вопрос.

Задача 6. **а)** Пусть A, B, C — многочлены. Верно ли, что множество общих делителей многочленов A и B совпадает с множеством общих делителей многочленов A и $B - A \cdot C$, причём $(A, B) = (A, B - A \cdot C)$?
б) Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида вычисления НОД многочленов.

Задача 7. Докажите, что (A, B) — это приведенный многочлен наибольшей степени, делящий и A, и B.

Задача 8. Найдите НОД многочленов: **а)** $x(x-1)^3(x+2)$ и $(x-1)^2(x+2)^2(x+5)$;
б) $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^2 - x + 1$; **в)*** $x^m - 1$ и $x^n - 1$; **г)*** $x^m + 1$ и $x^n + 1$.

Задача 9. Пусть A и B — любые многочлены степени m и n соответственно. Докажите, что
а) существуют такие многочлены U и V, что НОД$(A, B) = AU + BV$;
б) если $m,\ n > 0$, то U и V можно выбрать так, чтобы $\deg U < n$ (или $U = 0$) и $\deg V < m$ (или $V = 0$).
в) Найдите такие U и V, если A и B — многочлены из пункта б) предыдущей задачи.

Определение 4. Многочлен положительной степени из $\mathbb{R}[x]$ называется *неприводимым* (*над* $\mathbb{R}$), если он не представляется в виде произведения двух многочленов меньшей степени из $\mathbb{R}[x]$. Аналогично определяется понятие неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена положительной степени из $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 10. Может ли неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ не быть неприводимым над $\mathbb{R}$?

Задача 11. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{R}$ и на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$:
а) $5x + 7$; **б)** $x^2 - 2$; **в)** $x^3 + x^2 + x + 1$; **г)** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; **д)** $x^3 + 3$; **е)** $x^4 + 4$.

Задача 12. Пусть многочлены $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ не имеют общего делителя положительной степени. Докажите, что тогда существуют такие многочлены $U(x)$ и $V(x)$ из $\mathbb{R}[x]$, что $AU + BV = 1$.

Задача 13. Докажите, что если неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен $P(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ делит произведение двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{R}[x]$, то он делит один из этих многочленов.

Задача 14. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{R}[x]$ ненулевой степени однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{R}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов из $\mathbb{R}[x]$.

Задача 15. Верно ли, что любой многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ ненулевой степени однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{Q}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов из $\mathbb{Q}[x]$?

Задача 16. Пусть $a \in \mathbb{R}$ — общий корень многочленов S и T из $\mathbb{Q}[x]$, причём T неприводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что S делится на T, и частное — многочлен с рациональными коэффициентами.

Задача 17. Делится ли **а)** многочлен $x^{100} - 32x^{90} + x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 10x + 2$ на многочлен $x^2 - 2$?
б) многочлен $x^{11} + x^9 - 5x^8 + x^7 - 6x^6 - 7x^4 - 98x^2 - 49$ на многочлен $x^3 - 7$?

Задача 18*. **а)** Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — корень некоторого ненулевого многочлена из $\mathbb{Q}[x]$. Пусть $G(x)$ — произвольный многочлен из $\mathbb{Q}[x]$, такой что $G(\alpha) \neq 0$. Докажите, что существует такой многочлен $H(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что $\dfrac{1}{G(\alpha)} = H(\alpha)$. **б)** Найдите такой многочлен $H(x)$, если $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $G(x) = x + 1$.

1	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	8 в	8 г	9 а	9 б	9 в	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	12	13	14	15	16	17 а	17 б	18 а	18 б