Определение 1. *Многочленом степени n от одной переменной x* называется любое выражение вида $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а *коэффициенты* $a_n, \ldots, a_0$ — действительные числа, причём $a_n \neq 0$. Краткое обозначение: $A(x)$ или A. Коэффициент a_n называют *старшим*. Степень ненулевого многочлена A обозначают $\deg A$. Число 0 называют *нулевым* многочленом, его степень не определена.

Задача 1. Определите *сумму* и *произведение* многочленов.

Задача 2. **а)** Пусть $\deg A = 10$, $\deg B = \deg C = 7$. Какими могут быть $\deg(A + B)$ и $\deg(B + C)$?
б) Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$. **в)** Докажите, что $\deg A(B(x)) = \deg A \cdot \deg B$.

Задача 3. Может ли произведение нескольких ненулевых многочленов быть нулевым многочленом?

Определение 2. Многочлен $A(x)$ задаёт функцию $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая сопоставляет каждому действительному числу s число $A(s)$ (результат подстановки в выражение $A(x)$ числа s вместо переменной x).

Задача 4. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена: **а)** $(x-1)^n$; **б)** $(x+1)^n$; **в)** $(x-2)^n$; **г)** $(x+2)^n$; **д)** $(1 - x + x^4)^{1000}$. **е)** Найдите сумму коэффициентов при нечётных степенях у многочлена из пункта д).

Число корней многочлена

Определение 3. Число s называется *корнем* многочлена A, если $A(s) = 0$.

Задача 5. Докажите, что если многочлен A *делится* на многочлен B, то есть существует такой многочлен C, что $A = BC$, то все корни B являются корнями A. Верно ли обратное утверждение?

Задача 6. Делится ли многочлен $x^9 - 1$ на многочлен x? А на многочлен $x^2 - 1$?

Задача 7. Произвольный многочлен $A(x)$ домножили на $(x - 1)$. Могут ли у получившегося многочлена все коэффициенты быть положительными?

Задача 8. Докажите, что число s — корень многочлена $A(x)$ если и только если $A(x)$ делится на $x - s$.

Задача 9. Пусть $A(1) = A(2) = 0$. Докажите, что $A(x)$ делится на $(x - 1)(x - 2)$.

Задача 10. Докажите, что число различных корней многочлена A не больше $\deg A$.

Задача 11. Могут ли разные многочлены задавать одну и ту же функцию?

Задача 12. Можно ли задать многочленом функцию $\sin x$?

Задача 13. Пусть значения многочленов A и B совпадают при n различных значениях переменной, и степени этих многочленов меньше n. Докажите, что тогда $A = B$.

Задача 14. В скольких точках прямая может пересекать параболу?

Задача 15. **а)** Докажите, что любой многочлен степени 3 представляется в виде $a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2)$.
б) Найдите такой многочлен $P(x)$ степени 3, что $P(0) = -8$, $P(1) = 5$, $P(2) = 6$, $P(3) = 1$.

Задача 16. Докажите, что для любых различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и любых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше n такой, что $P(a_1) = b_1$, $\ldots$, $P(a_n) = b_n$.

Корни многочленов с целыми коэффициентами

Задача 17. Докажите, что если многочлен $A(x)$ с целыми коэффициентами принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, то уравнение $A(x) = 0$ не имеет целых решений.

Задача 18. **а)** Ненулевая несократимая дробь p/q — корень многочлена $A(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда a_n делится на q и a_0 делится на p.
б) Пусть в предыдущем пункте $a_n = 1$. Докажите, что все рациональные корни A — целые числа.

Задача 19. Найдите все рациональные корни многочленов: **а)** $x^3-6x^2+15x-14$; **б)** $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$.

Задача 20. **а)** Коэффициенты многочлена Q рациональны, $Q(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $Q(-\sqrt{2}) = 0$.
б) Найдите ненулевой многочлен P с целыми коэффициентами и корнем $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Найдите все корни P.

Теорема Виета

Задача 21. **а)** Пусть многочлен $a(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ раскладывается на *линейные* множители (т. е. многочлены первой степени): $a(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$. Докажите, что справедливы *формулы Виета:*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = b, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c.$$

б)* Найдите подобные формулы, если $\deg a(x) = n$, и $a(x)$ раскладывается на линейные множители.

Задача 22. **а)** Про числа a, b, c известно, что $a + b + c > 0$, $ab + bc + ac > 0$, $abc > 0$. Докажите, что a, b и c положительны. **б)** Пусть $a + b + c < 0$, $ab + bc + ac < 0$, $abc < 0$. Какие знаки могут иметь числа a, b, c?

Задача 23*. **а)** Пусть число $c \neq 0$. Докажите, что многочлен $x^5 + ax^2 + bx + c$ не может раскладываться на пять линейных множителей. **б)** Та же задача для многочлена $x^5 + ax^4 + bx^3 + c$.

Задача 24. Коэффициенты многочлена $(x - a)(x - b)$ целые. Докажите, что число $a^n + b^n$ целое при $n \in \mathbb{N}$.

Задача 25*. Найдите первые n цифр после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{26} + 5)^n$.

1	2 а	2 б	2 в	3	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	4 е	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 а	15 б	16	17	18 а	18 б	19 а	19 б	20 а	20 б	21 а	21 б	22 а	22 б	23 а	23 б	24	25