Задача 1. Что больше: **а)** 5^{15} или 15^5; **б)** 2^{100} или 10^{30}; **в)** 7^8 или 8^7; **г)** 3^{500} или 7^{300}?

Задача 2. **а)** Число x изменили не более, чем на $0,1$. Могло ли при этом значение x^2 измениться более, чем на 10? **б)** Тот же вопрос для значения $\sqrt{x}$.

Задача 3. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии с натуральными основанием и разностью найдется число, десятичная запись которого начинается с 1.

Задача 4. **а)** Докажите, что $a + (1/a) \geqslant 2$ при $a > 0$. **б)** Каково наименьшее значение $a + (9/a)$ при $a > 0$?

Задача 5. Найдите первые **а)** девять; **б)** десять знаков после запятой у числа $\sqrt{0,999\,999\,999}$.

Задача 6. Решите в натуральных числах уравнения: **а)** $a! + b! + c! = d!$; **б)** $n(n+1) = m(m+2)$;
в) $(1/a) + (1/b) + (1/c) = 1$; **г)** $x + y + z = xyz$; **д)** $x^3 + 4x^2 + 1 = y^3$; **е)** $xy + yz + xz = xyz + 2$.

Задача 7. Десятичная запись числа $a \in \mathbb{N}$ состоит из n цифр. **а)** Сколько цифр может быть в десятичной записи числа a^3? **б)** Десятичная запись a^3 состоит из k цифр. Возможно ли, что $n + k = 2005$?

Задача 8. Сколько цифр в десятичной записи **а)** числа 2^{40}; **б)** числа 2^{100}; **в)** чисел 2^{2010} и 5^{2010} вместе?

***

Задача 9. В банк кладут 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет получат больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы раз в год или если он начисляет $(5/12)\%$ раз в месяц?

Задача 10. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных x выполнены неравенства **а)** (*неравенство Бернулли*) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$; **б)** $(1+x)^n \geqslant 1 + xn + x^2 n(n-1)/2$.

Задача 11. Укажите такое целое $n > 1$, что **а)** $1,001^n > 10^5$; **б)** $0,999^n < 10^{-5}$; **в)** $\sqrt[n]{n} < 1{,}001$.

Определение 1. Говорят, что неравенство верно «при всех достаточно больших n» или «при n много больше нуля», если найдётся такое k, что неравенство верно при всех $n > k$. Обозначение: верно при $n \gg 0$.

Задача 12. **а)** Докажите: $n^n > 10^6 \cdot n!$ при $n \gg 0$. **б)** Можно ли заменить 10^6 на любое другое число?

Задача 13. **а)** Докажите, что $0,001n^2 > 100n + 179$ при $n \gg 0$.
б) Число C — любое, n и m — натуральные, причём $n > m$. Докажите, что $x^n > Cx^m$ при $x \gg 0$.
в) Дан многочлен $P(x) = p_k x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \cdots + p_1 x + p_0$, где $p_k > 0$. Верно ли, что $P(x) > 0$ при $x \gg 0$?

Задача 14. Докажите, что если $a > 1$ и C — любое, то **а)** $a^n > C$ при $n \gg 0$; **б)** $a^n > n$ при $n \gg 0$.

Задача 15. Верно ли, что **а)** $1,01^n > 100n$ при $n \gg 0$; **б)** если $a > 1$, $C > 0$, то $a^n > Cn$ при $n \gg 0$?

Определение 2. Говорят, что задана *последовательность* (x_n) чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n. Другими словами, *последовательность* — это любая числовая функция, определённая на множестве натуральных чисел.

Задача 16. **а)** Пусть $q > 1$, и последовательность положительных чисел (x_n) такова, что $x_{n+1}/x_n > q$ при $n \gg 0$. Докажите, что $x_n > 1$ при $n \gg 0$. **б)** Верно ли утверждение пункта а), если $q = 1$?

Задача 17. Докажите, что при натуральных $n \gg 0$ **а)** $2^n > n^{100}$; **б)** если $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$, то $a^n > n^k$.

Задача 18. Докажите, что для любого a неравенство $n! > a^n$ выполнено при $n \gg 0$.

***

Задача 19. **а)** Докажите, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.
б) *(Гармонический ряд)* Для любого ли числа C найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что будет выполнено неравенство $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geqslant C$? **в)** Тот же вопрос для неравенства $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geqslant C$.

Задача 20*. Есть неограниченное число одинаковых кирпичей (прямоугольных параллелепипедов). Их кладут друг на друга со сдвигом (так, чтобы не падали). «Крышу» какой наибольшей длины можно получить?

Задача 21. Докажите для $n \in \mathbb{N}$: **а)** $a^{n+1}/b^n \geqslant (n+1)a - nb$, если $a, b > 0$; **б)** $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \geqslant (1 + \frac{1}{n})^n$;
в) $(1 + \frac{1}{n-1})^n \geqslant (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$; **г)** $2 \leqslant (1 + \frac{1}{n})^n \leqslant 4$; **д)** $(1 + \frac{1}{n})^n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

***

Задача 22. Докажите, что $x^{n_1} - x^{n_2} + x^{n_3} - \cdots + x^{n_{2k+1}} \geqslant 0$ при $x > 0$, если $n_1 > n_2 > \cdots > n_{2k+1}$ натуральные.

Задача 23. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Задача 24. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

Задача 25. Описанный около круга квадрат разбили на 100×100 равных квадратиков и закрасили квадратики, не выходящие за пределы круга. Докажите, что площадь закрашенной фигуры не меньше 94% площади круга.

Задача 26*. Из клетчатой плоскости вырезали клетки, обе координаты которых делятся на 10. Можно ли оставшуюся часть плоскости разрезать на доминошки (каждая состоит из двух соседних клеток)?

Задача 27*. Найдётся ли такое целое n, что первые 9 знаков после запятой у числа $\{\sqrt{n}\}$ будут 987654321?

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	6 е	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	9	10 а	10 б	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17 а	17 б	18	19 а	19 б	19 в	20	21 а	21 б	21 в	21 г	21 д	22	23	24	25	26	27