

Соглашение. Во всех задачах честняги всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, хитрецы могут делать и то, и другое.

Задача 1. За день до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня он чихнул. Обязательно ли завтра будет дождь?

Задача 2. а) Является ли старейший шахматист среди музыкантов старейшим музыкантом среди шахматистов?

б) Является ли лучший шахматист среди музыкантов лучшим музыкантом среди шахматистов?

Задача 3. В группе из 10 лжецов и честняг каждый сказал: «Вы все лжецы!». Сколько из них солгали?

Задача 4. Трем школьникам завязали глаза и надели на головы по чёрной шапке. Им дали задание: отгадать, кто в какой шапке, если известно, что всего шапок 5, причём две из них серые, а три — чёрные. Серые шапки спрятали и сняли с глаз повязки. Через некоторое время один из учеников отгадал, что он в чёрной шапке. Как он это сделал?

Задача 5. Какой вопрос надо задать аборигену, чтобы понять, кто перед вами — лжец или честняга?

Задача 6. а) Часть жителей острова честняги, остальные — лжецы. Путешественник, владеющий языком островитян, оказался у развилки двух дорог: одна ведет в деревню, а другая — в болото. На распутье он встретил аборигена. Как путешественнику, задав один вопрос (предполагающий ответ «да» или «нет»), узнать, какая дорога ведет в деревню?

б) А если путешественник забыл, какое из слов «пиш» и «таш» на местном наречии означает «да», а какое — «нет».

Задача 7. Каждый туземец острова Амба — честняга или лжец. а) Перед вами два туземца. На вопрос «Вы — честняга?» первый буркает что-то неразборчивое. Второй приходит на помощь: «Мой друг ответил «да». Но не верьте ему — он лжец». Кто эти туземцы? б) Один из другой пары туземцев говорит: «Я лжец или мой друг лжец». Ваши выводы?

в) Что вы подумаете, услышав «Я лжец и мой друг лжец»? г) А услышав «Если я честняга, то мой друг лжец»?

Задача 8. Пусть ваш преподаватель задумает целое число от 1 до 3. Придумайте вопрос, на который он честно должен ответить «Да», «Нет» или «Не знаю», после чего вы наверняка отгадаете задуманное число.

Задача 9. а) Перед вами трое — лжец, честняга и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?

б) Перед вами четверо — лжец, честняга и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он. (Можно задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет», например: «верно ли, что этот человек — хитрец?».)

Задача 10. Перед вами в ряд стоят три суперкомпьютера: американский, китайский и российский (в каком именно порядке — неизвестно). Разрешается задать первому компьютеру один вопрос (на который можно ответить «да» или «нет»), после чего он даст ответ. Беда в том, что правдиво отвечает лишь американский компьютер, а два других сломаны: китайский всегда лжет, а российский отвечает что попало. Компьютеры знают все друг о друге. Можно ли придумать вопрос, который позволит гарантированно купить а) не российский компьютер; б) не китайский компьютер?

Задача 11. В магазине между клиентом K и продавцами $П1$, $П2$ произошёл такой диалог. K : «Сколько стоит этот диван?» $П1$: «60000 рублей.» $П2$: «Не верьте, он все числа завышает в 3 раза!» $П1$: «А он все числа занижает в 12 раз!» Сколько стоит диван, если продавцы изменяют все числа, каждый в свое число раз, а в остальном говорят правду?

Задача 12. Двум мудрецам сообщили по натуральному числу, сказав, что они различаются на 1. После этого мудрецы по очереди задают друг другу вопрос: «Знаешь ли ты моё число?» (отвечают «да» или «нет»). Узнают ли они оба числа?

Определение 1. Назовём *высказыванием* любое повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно. Если A и B — некоторые высказывания, то можно определить следующие высказывания:

«не A » (обозначение \bar{A}) — *отрицание* высказывания A , истинно если и только если A ложно;

« A и B » (обозначение $A \wedge B$) — *конъюнкция* A и B , истинно если и только если A и B истинны;

« A или B » ($A \vee B$) — *дизъюнкция* A и B , истинно если и только если хотя бы одно из A и B истинно;

«если A , то B » (обозначение $A \rightarrow B$), истинно если и только если A ложно или A и B истинны.

Задача 13. Докажите, что высказывание $A \rightarrow B$ истинно если и только если истинно высказывание $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$.

Задача 14. Выразите а) $A \rightarrow B$; б) $A \wedge B$ через A и B , используя только дизъюнкцию и отрицание.

Задача 15. Выразите а) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$; б) $A \vee B$ через A и B , используя только конъюнкцию и отрицание.

Задача 16*. Докажите, что высказывание, истинность которого зависит только от истинности высказываний A_1, \dots, A_n , выражается через них с помощью только дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Задача 17. Назовём контрольную лёгкой, если за каждой партой найдётся ученик, решивший все задачи. Дайте определение трудной (т. е. не являющейся лёгкой) контрольной, не используя частицы «не».

Задача 18. Солдату-цирюльнику пришел приказ: брить тех солдат его взвода, которые не бреются сами (а остальных не брить). Сможет ли он его выполнить?

Задача 19. Являются ли следующие утверждения истинными или ложными:

Утверждение в рамке ложно

Утверждение в двойной рамке истинно

Задача 20*. Н.Н.Константинов сказал участникам своего семинара: «В январе занятия проходят 13, 17, 20, 24, 27 и 31 числа. В один из этих дней вам будет предложена контрольная работа, но в какой именно день, вы накануне знать ещё не будете.» Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена а) 31 января; б) 27 января; в) 20 января. г) Однако 20 января эта контрольная состоялась (кстати, единственную задачу этой контрольной вы сейчас читаете). И накануне ни один участник семинара об этом не знал. Как это совместить с решением предыдущих пунктов задачи?

Задача 21*. Число $x \in (0; 1)$ назовём *вычислимым*, если есть конечный алгоритм, который позволяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ определить n -ый знак после запятой в десятичной записи x . а) Докажите, что множество вычислимых чисел из интервала $(0; 1)$ счётно. б) Выпишем десятичные записи всех вычислимых чисел в таблицу, и диагональным методом (как в задаче 16, а листка 13) построим вычислимое число, не входящее в таблицу. Объясните это противоречие.