Листок №13

Бесконечные множества

10.2010

Определение 1. Множество называется *счётным,* если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.
Говорят, что множество X *не более чем счётно,* если X пусто, конечно или счётно.

Задача 1. Любое ли счётное множество можно разбить на 3 непересекающихся счётных множества?

Задача 2. В ящике A счётное число орехов, ящики B и C пусты. Берут 10 орехов из ящика A и перекладывают их в ящик B, после чего берут один орех из ящика B и перекладывают его в ящик C. Сколько орехов может оказаться в каждом из ящиков после бесконечного числа таких действий?

Задача 3. Докажите: **а)** подмножество счётного множества не более чем счётно; **б)** если A и B счётны, то $A \cup B$ счётно; **в)** объединение конечного (или счётного) множества счётных множеств счётно.

Задача 4. Докажите, что счётно **а)** множество точек плоскости, координаты которых — целые числа; **б)** множество $\mathbb{Q}$; **в)** множество пар $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$, где A и B счётны.

Задача 5. Найдите алгебраическое выражение от двух переменных x и y, задающее взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости с натуральными координатами и $\mathbb{N}$.

Задача 6. Докажите, что счётно **а)** множество конечных последовательностей из 0 и 1;
б) множество предложений русского языка; **в)** множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Задача 7. Счётно ли **а)** множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны;
б) множество всех треугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны;
в) множество всех многоугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны?

Задача 8. Счётно ли любое бесконечное множество непересекающихся
а) интервалов длины более 1 на прямой; **б)** интервалов на прямой; **в)** кругов на плоскости;
г) восьмёрок на плоскости (восьмёрка — это любые две касающиеся внешним образом окружности);
д)* букв «Т» (любых размеров) на плоскости?

Задача 9. Счётно ли множество корней квадратных уравнений с рациональными коэффициентами?

Задача 10. **а)** Докажите, что в любом бесконечном множестве найдется счётное подмножество;
б) Докажите, что множество M бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству, полученному из M удалением одного элемента.

Задача 11. Равномощны ли множества точек: **а)** интервал и отрезок; **б)** полуокружность и прямая; **в)** интервал и прямая; **г)** два круга; **д)** окружность и треугольник; **е)** квадрат и плоскость; **ж)** квадрат и круг; **з)** отрезок и счётное объединение непересекающихся отрезков? (*Замечание:* квадрат в этом листке — это квадрат с внутренностью, например множество точек (x, y), где $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.)

Задача 12. Из бесконечного множества M удалили некоторое счётное множество и получили бесконечное множество M'. Докажите, что M и M' равномощны.

Задача 13. Равномощно ли множество иррациональных чисел множеству всех действительных чисел?

Задача 14. Равномощно ли множество всех лучей множеству всех окружностей (на плоскости)?

Задача 15. Докажите, что множество S бесконечных последовательностей из 0 и 1, множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ и множество бесконечных вправо и вниз таблиц из 0 и 1 равномощны.

Задача 16. **а)** Дана бесконечная вправо и вниз таблица из 0 и 1. Покажите, как по этой таблице составить бесконечную строку из 0 и 1, которая не совпадёт ни с одной из строк таблицы.
(*Указание:* надо, чтобы новая строка отличалась от каждой строки таблицы хотя бы в одном месте.)
б) Докажите, что множество S из задачи 15 *несчётно:* бесконечно, но не является счётным.

Задача 17. Пусть S — множество из задачи 15. Докажите, что множества S и $S \times S$ равномощны.

Задача 18*. Докажите, что множество точек любого отрезка равномощно
а) множеству S задачи 15; **б)** множеству точек квадрата; **в)** множеству точек куба.

Задача 19*. (*Теорема Кантора–Бернштейна*) Если множество A равномощно подмножеству множества B и множество B равномощно подмножеству множества A, то A и B равномощны.

Задача 20*. Отрезок представлен в виде объединения двух множеств. Докажите, что одно из этих множеств равномощно отрезку. (*Указание:* отрезок равномощен квадрату.)

Задача 21*. Докажите, что множества задачи 15 равномощны **а)** множеству взаимно однозначных соответствий между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$; **б)** множеству бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Интересный трудный факт. *Из любых двух множеств одно равномощно подмножеству другого.*

1	2	3 а	3 б	3 в	4 а	4 б	4 в	5	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	9	10 а	10 б	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	11 з	12	13	14	15	16 а	16 б	17	18 а	18 б	18 в	19	20	21 а	21 б