Задача 1. а) (*Решето Эратосфена*) Выпишем в ряд целые числа от 2 до n. Подчеркнём число 2 и сотрём числа, делящиеся на 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём числа, делящиеся на него, и т. д. Будем действовать так, пока каждое число от 2 до n не будет либо подчёркнуто, либо стёрто. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до n. **б)** Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше $\sqrt{n}$. Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до n простые. **в)** Какие числа, меньшие 100, простые?

Задача 2. (*Основная теорема арифметики*) Докажите следующие утверждения:

а) если p — простое число, a и b — целые, и $ab \vdots p$, то либо $a \vdots p$, либо $b \vdots p$;

б) для каждого целого $n > 1$ найдутся такие простые $p_1, \ldots, p_k$, что $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$;

в) (*каноническое разложение*) Для каждого целого $n > 1$ найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_k$ и натуральные $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$;

г) разложения из пунктов б) и в) единственны с точностью до порядка сомножителей.

Задача 3. Назовём чётное число n *чётнопростым,* если n не раскладывается в произведение двух чётных чисел. (Например, 6 — чётнопростое, а 12 — нет.) Какие пункты задачи 2 будут верны, если заменить в условии целые числа на чётные, а простые — на чётнопростые?

Задача 4. Числа a, b, c, n натуральные, $(a, b) = 1$, $ab = c^n$. Найдутся ли такие целые x и y, что $a = x^n$, $b = y^n$?

Задача 5. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42} = y^{55}$.

Задача 6. Найдите каноническое разложение числа **а)** 2010; **б)** 2011; **в)** 17!; **г)** C_{20}^{10}.

Задача 7. а) (*Теорема Лежандра*) Докажите, что простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$ (где $[x]$ — это *целая часть* числа x).

С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю?

б) Сколько у 2000! нулей в конце его десятичной записи? **в)** Может ли $n!$ делиться на 2^n ($n \geqslant 1$)?

Задача 8. Число p простое. Докажите, что C_p^k делится на p, если $0 < k < p$.

Задача 9. (*Малая теорема Ферма*) Пусть p — простое число, n — целое число. Докажите, что

а) $n^p - n$ делится на p; **б)** если $(n, p) = 1$, то $n^{p-1} - 1$ делится на p.

Задача 10*. **а)** Числа p и q простые, $2^p - 1 \vdots q$. Докажите, что $q - 1 \vdots p$. **б)** Простое ли $2^{13} - 1$?

Задача 11*. Может ли быть целым число **а)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$; **б)** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n+1}$?

***

Определение 1. *Наименьшим общим кратным* ненулевых целых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b. Обозначение: $[a, b]$ или $\mathrm{НОК}(a, b)$.

Задача 12. а) Как, зная канонические разложения чисел a и b, найти (a, b) и $[a, b]$? **б)** Найдите $[192, 270]$. **в)** Докажите, что $ab = (a, b) \cdot [a, b]$. **г)** Верно ли, что $[a, b]/a$ и $[a, b]/b$ взаимно просты?

Задача 13. Докажите, что любое общее кратное целых чисел a и b делится на $[a, b]$.

Задача 14. Про натуральные числа a и b известно, что $(a, b) = 15$, $[a, b] = 840$. Найдите a и b.

Задача 15. Может ли $\mathrm{НОК}(1, 2, \ldots, n)$ быть в 2008 раз больше, чем $\mathrm{НОК}(1, 2, \ldots, m)$?

Задача 16*. Найдутся ли 100 таких различных натуральных чисел, что для любых двух чисел a и b из них **а)** ab делится на сумму всех 100 чисел; **б)** $a+b$ делится на $a-b$; **в)** $(a, b) = |a-b|$? **г)** Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с разными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, где богатыри могут обгонять друг друга?

***

Задача 17. Найдите все натуральные числа с нечётным числом натуральных делителей.

Задача 18. Число n натуральное. Докажите, что натуральных делителей у n меньше, чем $2\sqrt{n}$.

Задача 19. Пусть $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n, и пусть $\tau(n)$ и $S(n)$ — соответственно количество и сумма натуральных делителей числа n.

а) Найдите $\tau(p_1^{\alpha_1})$. **б)** Верно ли, что $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$, если $(a, b) = 1$? **в)** Найдите $\tau(n)$.

г) Найдите $S(p_1^{\alpha_1})$. **д)** Верно ли, что $S(ab) = S(a)S(b)$, если $(a, b) = 1$? **е)** Найдите $S(n)$.

Задача 20. Какие натуральные числа делятся на 30 и имеют ровно 20 натуральных делителей?

Задача 21*. Число n натуральное. Докажите, что количество упорядоченных пар натуральных чисел $(u; v)$, где $[u, v] = n$, равно количеству натуральных делителей у числа n^2.

Задача 22*. Натуральное число называется *совершенным,* если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Докажите, что чётное число n совершенно тогда и только тогда, когда найдется такое простое p, что $2^p - 1$ также простое, и $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	2 в	2 г	3	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	8	9 а	9 б	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15	16 а	16 б	16 в	16 г	17	18	19 а	19 б	19 в	19 г	19 д	19 е	20	21	22