Степенные ряды и производящие функции

Степенные ряды

Определение 1. *Формальным степенным рядом* от переменной t называется бесконечное выражение вида $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kt^k$, где $a_0, a_1, \dots$ — числовая последовательность (*коэффициенты* ряда). Два ряда считаются равными, если равны их соответствующие коэффициенты. Слагаемые с нулевыми коэффициентами мы будем, как правило, пропускать. Например, многочлен — это ряд с конечным числом ненулевых коэффициентов.
Сопоставление рядам F, G нового ряда H называется *формальной алгебраической операцией,* если каждый коэффициент ряда H вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов F, G. Например, сложение и умножение рядов определяются так же, как для многочленов и *являются формальными операциями,* а «вычисление значения ряда при данном числовом значении t» *не является формальной операцией* (и потому здесь не определяется).

Задача 1. Проверьте, что сложение и умножение рядов являются формальными операциями.

Задача 2. **а)** Пусть $F(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$, $G(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$. Найдите $F + G$ и $F \cdot G$.
б) Пусть $F = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}t^k$, $G = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}t^k$. Найдите $F \cdot G$ и F^2.

Задача 3. (*Замена переменной*) Является ли формальной алгебраической операцией подстановка в ряд вместо переменной t произвольного ряда с нулевым свободным членом?

Задача 4. Найдите (если это возможно) такой ряд F, что **а)** $(1-t)\cdot F = 1$; **б)** $(2-t)\cdot F = 1$;
в) $(t^2 + t^3 + t^4 + \dots)\cdot F = t^4 - t^6 + t^8 - \dots$; **г)** $(t^3 + t^4 + t^5 + \dots)\cdot F = t^2 - t^4 + t^6 - \dots$.

Задача 5. Ряд $a(t)$ называется *обратимым,* если существует такой ряд $a^{-1}(t)$, что $a(t)a^{-1}(t) = 1$. Докажите, что ряд $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём $a^{-1}(t)$ единственен, и его отыскание есть формальная операция.

Задача 6. При каких условиях на числа a и b ряд $\dfrac{1}{(a-t)(b-t)}$ можно записать в виде $\dfrac{c}{(a-t)} + \dfrac{d}{(b-t)}$ (подобрав подходящие числа c и d)?

Задача 7. Найдите n-тый коэффициент ряда: **а)** $\big((1-t)(2-t)\big)^{-1}$; **б)** $\big((1-t)^2\big)^{-1}$; **в)** $\big((1-t)^m\big)^{-1}$;
г) $\big((t-1)(t+2)(t-3)\big)^{-1}$; **д)** $\big((t+1)^2(t-2)(t+3)^3\big)^{-1}$; **е)** $(t^2+t-1)^{-1}$; **ж)*** $(t^2+t+1)^{-1}$.

Задача 8. Сформулируйте условия, при которых степенной ряд F можно разделить на степенной ряд G (иначе говоря, уравнение $G \cdot X = F$ разрешимо относительно неизвестного степенного ряда X). Всегда ли результат деления определен однозначно?

Задача 9. **а)** При каких условиях на степенной ряд F разрешимо уравнение $X^2 = F$ относительно неизвестного степенного ряда X? **б)** Найдите коэффициенты такого степенного ряда X, что $X^2 = 1 + t$. **в)** Существует ли степенной ряд X, удовлетворяющий уравнению $tX^2 - X + 1 = 0$?

Производящие функции

Определение 2. Пусть $(a_k) = (a_0, a_1, \dots)$ — числовая последовательность, а t — формальная переменная. Степенной ряд $\sum a_kt^k$ называется *производящей функцией* последовательности (a_k).

Задача 10. Пусть $F(t)$ — производящая функция последовательности (a_k). Для какой последовательности производящей функцией будет степенной ряд **а)** $tF(t)$; **б)** $t^2F(t)$; **в)** $(1+t)F(t)$?

Задача 11. **а)** Напишите, пользуясь рекуррентным соотношением $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$ и начальными условиями $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, уравнение для производящей функции чисел Фибоначчи и решите его. **б)** Найдите формулу для n-го числа Фибоначчи.

Задача 12. Найдите явную формулу для последовательности (g_n), если $g_0 = g_1 = 1$ и при $n \geqslant 2$
а) $g_n = 5g_{n-1} - 6g_{n-2}$; **б)** $g_n = 6g_{n-1} - 9g_{n-2}$; **в)** $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n$; **г)** $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \ldots + ng_0$.

Задача 13. Сколькими способами можно замостить прямоугольник $3 \times n$ плашками размера 2×1?

Задача 14. Пусть $c_0 = 1$, а при $n \geqslant 1$ пусть c_n — это число правильных расстановок n открывающих и n закрывающих скобок (n-е число Каталана). Напишите рекуррентную формулу, выражающую c_n через $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, получите из неё уравнение на производящую функцию $c(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots$ и, решив это уравнение, найдите явную формулу для чисел Каталана.

Задача 15. Пусть d_n — число разбиений n-угольника $A_1 \dots A_n$ на треугольники своими непересекающимися (нигде, кроме вершин) диагоналями. По определению положим $d_2 = 1$.
а) Докажите, что при всех $n \geqslant 3$ верна формула $d_n = d_2d_{n-1} + d_3d_{n-2} + \ldots + d_{n-1}d_2$.
б) Докажите, что ряд $D(t) = d_2t^2 + d_3t^3 + \dots$ удовлетворяет равенству $D^2(t) - tD(t) + t^3 = 0$.
в) Найдите явную формулу для d_n.

Задача 16. Пусть s_n — число способов выплатить n гривен купюрами в 1 и 2 гривны. Является ли ряд

$$(1 + t + t^2 + t^3 + \dots)(1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots)$$

производящей функцией для последовательности (s_n)?

Задача 17. (*Старинная задача*) Сколькими способами можно заплатить 1 рубль копейками, алтынами (трёхкопеечными монетами) и пятаками (пятикопеечными монетами)?

Разбиения чисел*

Определение 3. *Число разбиений* $p(n)$ — это число всевозможных представлений n в виде суммы нескольких натуральных слагаемых[1], то есть число всех n-клеточных диаграмм Юнга; $p(0) \overset{\text{def}}{=} 1$.

Задача 18. Вычислите $p(n)$ для $n \leqslant 10$.

Задача 19. Пусть $P(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$ — производящая функция последовательности $(p(n))$. Докажите, что

$$P(t) = (1 + t + t^2 + t^3 + \ldots) \cdot (1 + t^2 + t^4 + t^6 + \ldots) \cdot (1 + t^3 + t^6 + t^9 + \ldots) \cdot \ldots$$

(проверив заодно, что это произведение бесконечного числа рядов является формальной операцией).

Задача 20. Докажите, что $1/P(t) = (1 - t) \cdot (1 - t^2) \cdot (1 - t^3) \cdot \ldots$.

Задача 21. Пусть $l(n)$ — это число разбиений числа n на нечётные натуральные слагаемые, и пусть $d(n)$ — это число разбиений числа n на различные натуральные слагаемые[1]. Докажите, что

а) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} l(n)t^n = \dfrac{1}{(1-t)\cdot(1-t^3)\cdot(1-t^5)\cdot\ldots}$; **б)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d(n)t^n = (1+t)\cdot(1+t^2)\cdot(1+t^3)\cdot\ldots$.

Задача 22. Докажите, что $l(n) = d(n)$ при всех натуральных n.

Задача 23. Докажите, что $\dfrac{1}{P(t)} = 1 + \sum\limits_{n \geqslant 1} (p(n) - p(n)) \cdot t^n$, где $p(n)$ и $p(n)$ — количества разбиений числа n на чётное, и, соответственно, на нечётное число различных натуральных слагаемых[1].

Задача 24. Рассмотрим множество Y_n всех n-клеточных диаграмм Юнга, строки которых имеют различные длины. Назовём *торцом* такой диаграммы её правую верхнюю клетку и все клетки, идущие от неё под углом 45° по диагонали влево вниз. Попробуем задать на Y_n отображение, которое, в зависимости от того, что у диаграммы длиннее — торец или нижняя строка, — либо отрезает её торец и пририсовывает его новой нижней строкой, либо, наоборот, отрезает нижнюю строку и пририсовывает её новым торцом. Выясните, для каких диаграмм это отображение не определено, и при каких n оно устанавливает в Y_n взаимно однозначное соответствие между диаграммами из чётного и из нечётного числа строк (а значит доказывает равенство $p(n) = p(n)$).

Задача 25. (*Пентагональная теорема Эйлера*) Докажите, что

$$\frac{1}{P(t)} = 1 + \sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \left(t^{\left(3k^2-k\right)/2} + t^{\left(3k^2+k\right)/2} \right)$$

и $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \cdots$.

Дополнительные задачи.

Задача 26. Для любого конечного множества M положим $C_M(t) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k \geqslant 0} c_k(M)t^k$, где $c_k(M)$ — это число всех k-элементных подмножеств в M. Для двух непересекающихся конечных множеств A и B выразите $C_{A \cup B}(t)$ и $C_{A \times B}(t)$ через $C_A(t)$ и $C_B(t)$.

Определение 4. Для произвольного числа α и натурального числа k *биномиальный коэффициент* $\dbinom{\alpha}{k}$ определяется формулой

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

(Для $\alpha = n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\dbinom{n}{k} = C_n^k$.) Для каждого α рассмотрим следующий степенной ряд:

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k.$$

(Для натуральных α это уже знакомая вам формула бинома Ньютона, а для остальных α правая часть равенства является определением левой.)

Задача 27. **а)** Ряд $(1+t)^{-1}$ определяется теперь двумя способами: как обратный к ряду $1+t$ и по биномиальной формуле. Согласуются ли эти определения?
б) Докажите, что для любого натурального числа n имеет место равенство $(1+t)^{-n}(1+t)^n = 1$.

Задача 28*. **а)** Докажите, что для любого α и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $(1+t)^\alpha(1+t)^n = (1+t)^{\alpha+n}$.
б) Докажите, что для любых α и β выполнено равенство $(1+t)^\alpha(1+t)^\beta = (1+t)^{\alpha+\beta}$.

Задача 29.** (*Нерешённая проблема*) Докажите или опровергните: если все коэффициенты ряда $G(z)$ равны либо 0, либо 1 и при этом все коэффициенты $\big(G(z)\big)^2$ меньше некоторой константы M, то бесконечно много из коэффициентов $\big(G(z)\big)^2$ равны нулю.

1	2 а	2 б	3	4 а	4 б	4 в	4 г	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж	8	9 а	9 б	9 в	10 а	10 б	10 в	11 а	11 б	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15 а	15 б	15 в	16	17	18	19	20	21 а	21 б	22	23	24	25	26	27 а	27 б	28 а	28 б	29

[1] Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.