Задача 1. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n — натуральное) возьмем наибольший нечетный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2.

Задача 2. Витя и Гриша учатся в классе из 20 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Витя и Гриша не входили в команду одновременно?

Задача 3. В библиотеке n книг и несколько читателей (каждый прочёл хотя бы одну книгу). Про любые k книг ($1 \leqslant k \leqslant n$) известно, сколько читателей прочитало их все. Как найти общее число читателей?

Задача 4. Существует ли бесконечно много таких целых чисел a, что $(a+9, a-9) = 1$?

Задача 5. Петя записал цифры 1, 2,..., 7 в неком порядке и получил семизначное число A. Затем он записал эти цифры в другом порядке и получил семизначное число B. Может ли B делиться на A?

Задача 6. Найдется ли такое натуральное число n, что $\frac{n}{2}$ — квадрат какого-то целого числа, $\frac{n}{3}$ — куб какого-то целого числа, а $\frac{n}{5}$ — пятая степень какого-то целого числа?

Задача 7. Натуральное число n назовём *хорошим,* если найдётся такая перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, что все числа $x_1+1, x_2+2, \ldots, x_n+n$ — степени двойки. Найти все хорошие числа.

Задача 8. Известно, что существует плоский граф, у которого B вершин, P рёбер и Γ граней. Докажите, что существует плоский граф, у которого Γ вершин, P рёбер и B граней.

Задача 9. Докажите, что в связном графе любые два длиннейших пути имеют общую вершину (в каждом пути запрещены повторяющиеся ребра).

Задача 10. Есть некое свойство, каждое множество им обладает или нет. Известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ обладает этим свойством. Обязательно ли и $\mathbb{N}$ обладает этим свойством?

Задача 11. Множество точек на плоскости (на прямой, в пространстве) называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит и все точки отрезка, их соединяющего. Докажите, что пересечение любого множества выпуклых множеств выпукло.

Задача 12. Равномощны ли множество точек квадрата (с внутренностью) и множество точек круга?

Дополнительные задачи

Задача 13. Найдите максимальное число частей, на которое могут разбить плоскость n окружностей.

Задача 14. Для учета посещаемости при входе в библиотеку повесили две доски. Каждый посетитель библиотеки обязан записать на одной доске, сколько читателей он застал, войдя в читальный зал, а на другой доске — сколько читателей оставалось в зале, когда он уходил из библиотеки. Докажите, что за день на обеих досках появятся одни и те же числа (быть может, в различном порядке).

Задача 15. На границе круга отметили n точек. Провели все хорды с вершинами в этих точках и для каждой пары хорд, пересекающихся внутри круга, отметили точку их пересечения. Сколько отметили точек, если известно, что все отмеченные точки оказались различными?

Задача 16. На плоскости, разграфленной сеткой вертикальных и горизонтальных прямых на квадратные клетки, нарисован выпуклый многоугольник так, что все его вершины находятся в вершинах клеток, и ни одна из его сторон не вертикальна и не горизонтальна. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки и сумма длин горизонтальных отрезков сетки внутри многоугольника равны.

Задача 17. Каких графов на n данных вершинах больше: связных или несвязных? Решите для всех n.

Задача 18. Докажите, что среди любых 2^{n+1} целых чисел есть 2^n чисел, сумма которых делится на 2^n.

Задача 19. Для натуральных m и n положим $S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + n^m$.

а) Докажите, что $(n+1)^{k+1} - 1 = S_k(n) \cdot C_{k+1}^1 + S_{k-1}(n) \cdot C_{k+1}^2 + \cdots + S_1(n) \cdot C_{k+1}^k + n$.

б) Как по формулам для $S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$ найти формулу для $S_k(n)$? Найдите $S_2(n)$ и $S_3(n)$.

в) Докажите, что $S_k(n)$ — многочлен от n. Найдите его степень, старший и свободный коэффициенты.

Задача 20*. На координатной плоскости нарисован выпуклый многоугольник. Известно, что на любом отрезке, концы которого лежат на сторонах многоугольника, находится не более n точек, все координаты которых — целые числа. Докажите, что внутри многоугольника (включая границу) находится не более n^2 точек, все координаты которых — целые числа.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19 а	19 б	19 в	20