Множество целиком определяется элементами, из которых оно состоит. Если элемент a принадлежит множеству A, пишут $a \in A$. Множество иногда записывают, перечисляя в фигурных скобках через запятую его элементы, например, $\{2, 5\}$ — множество, состоящее из элементов 2 и 5. Для многих множеств есть стандартные обозначения, например, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Множество можно также задавать, описав свойства его элементов: например, $\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x$ делится на $2\}$ — множество чётных чисел.

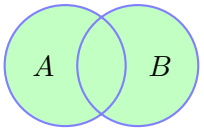
Определение 1. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A содержится в множестве B. Обозначение: $A \subseteq B$ (или $B \supseteq A$).

Задача 1. Какие из множеств $\{1, 2\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{\{2, 1\}\}$ являются подмножествами других?

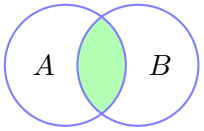
Определение 2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Обозначение: $\varnothing$. Число элементов в конечном множестве A обозначается $|A|$ (или $\#A$). Например, $|\varnothing| = 0$, $|\{6, 9\}| = 2$.

Задача 2. **а)** Сколько подмножеств у множества из n элементов? **б)** Пусть в множестве A всего n элементов, а в его подмножестве B всего k элементов. Сколько существует множеств C, для которых $B \subseteq C \subseteq A$?

Задача 3. Совпадают ли множество целых чисел, делящихся и на 3 и на 5, но не делящихся на 15, и множество прямоугольных треугольников с длиной гипотенузы 6 см и площадью 10 см^2?

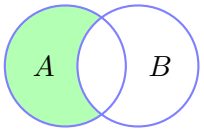


Определение 3. *Объединение* множеств A и B состоит из всех таких x, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B (то есть $x \in A$ или $x \in B$). Обозначение: $A \cup B$.
Пересечение множеств A и B состоит из всех таких x, что $x \in A$ и $x \in B$. Обозначение: $A \cap B$.
Разность множеств A и B состоит из всех таких x, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \setminus B$.



Задача 4. Пусть $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Найти $A \cap B$ и $B \setminus A$.

Задача 5. Верно ли, что для любых множеств A, B и C
а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; **б)** $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$; **в)** $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$?



Задача 6. Докажите для любых множеств A, B и C: **а)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; **в)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

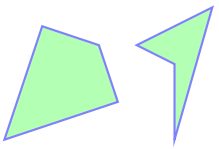
Задача 7. **а)** В НИИ 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий, и 23 — оба языка. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого? **б)** Пусть еще польский знают 20 человек, английский и польский — 12, немецкий и польский — 11, все три языка — 5. Сколько человек не знают ни одного из этих языков?

Задача 8. Пусть множества $A_1, \ldots, A_n$ конечны. Докажите, что **а)** $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
б) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
в) [Формула включений-исключений] Выведите аналогичную формулу для $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$. (Сравните с задачей 7, когда есть n языков, и для каждого набора языков известно, сколько человек знают все эти языки.)

Задача 9. В ряду $1+1+\ldots+1$ из 105 единиц изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, а затем — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 10. **а)** На полке стоят 10 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте? **б)** А если на месте должны остаться ровно 3 книги?

Задача 11. *Полуплоскость* — это множество точек плоскости, лежащих по одну сторону от некой прямой (в том числе и на самой этой прямой). Какой многоугольник на рисунке нельзя представить в виде пересечения нескольких полуплоскостей?



Определение 4. Говорят, что между множествами A и B задано *взаимно однозначное соответствие,* если каждому элементу множества A поставлен в соответствие какой-то определенный элемент множества B, причём каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A. Множества A и B *равномощны,* если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначение: $|A| = |B|$.

Задача 12. Докажите: **а)** $|A| = |A|$; **б)** если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$; **в)** если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задача 13. Обозначение $|X|$ уже встречалось для конечных множеств. Не будет ли недоразумений?

Задача 14. Сколько есть взаимно однозначных соответствий у конечного множества с самим собой?

Задача 15. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

Задача 16. Треугольников какого периметра больше (с целыми сторонами): **а)** 2007 или 2010; **б)** 2008 или 2011?

Задача 17. Сколько есть троек целых чисел $(x; y; z)$, где **а)** $0 < x < y < z < 2013$; **б)** $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 2009$?

Задача 18. Даны четыре множества: $\mathbb{N}$, множество чётных натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ и множество натуральных чисел без числа 3. Какие из этих множеств равномощны между собой?

Задача 19. Равномощны ли следующие множества точек: **а)** любые два отрезка; **б)** любые два интервала?

Задача 20*. Может ли множество быть равномощно множеству всех своих подмножеств?

1	2 а	2 б	3	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	9	10 а	10 б	11	12 а	12 б	12 в	13	14	15	16 а	16 б	17 а	17 б	18	19 а	19 б	20