Листок №8 Деревья. Формула Эйлера. Плоские графы 03.2010

Задача 1. Докажите, что граф является *деревом* (то есть связным и без циклов) если и только если каждые две его вершины соединены ровно одним путём с различными рёбрами.

Задача 2. Верно ли, что в дереве с более чем одной вершиной найдутся две *висячие* вершины? (Вершина называется *висячей,* если из неё выходит ровно одно ребро.)

Задача 3. N-угольник разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Построим граф, соответствующий этому разбиению: отметим внутри каждого треугольника точку (это будут вершины графа) и будем соединять две точки ребром ровно в том случае, когда соответствующие точкам треугольники имеют общую сторону. Докажите, что **а)** построенный граф будет деревом;
б) хотя бы у двух треугольников разбиения две стороны совпадают со сторонами N-угольника (при $N > 3$).

Задача 4. Как связаны число вершин и число рёбер произвольного дерева?

Определение 1. Граф O называется *остовом* связного графа G, если O имеет те же вершины, что и G, получается из G удалением некоторых рёбер и является деревом.

Задача 5. Всякий ли связный граф имеет остов? Может ли граф иметь несколько остовов?

Задача 6. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Задача 7. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным?

Определение 2. *Плоским графом* называется граф, который можно нарисовать на плоскости так, что его рёбра не будут пересекаться (нигде, кроме вершин). При этом граф разделит плоскость на части (одна из которых неограничена), все они называются *гранями* графа.

Задача 8. Докажите, что связный плоский граф является эйлеровым если и только если его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро принадлежало границам двух граней разного цвета.

Задача 9. (*Формула Эйлера*) Докажите, что для каждого связного плоского графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями имеет место равенство: $в - р + г = 2$.

Определение 3. Граф без кратных рёбер и петель называется *простым.* Простой граф называется *полным,* если любые две его различные вершины соединены ребром.

Задача 10. Для каких простых плоских графов верны неравенства: **а)** $2р \geqslant 3г$; **б)** $р \leqslant 3в - 6$?

Задача 11. Является ли плоским полный граф с пятью вершинами?

Задача 12. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

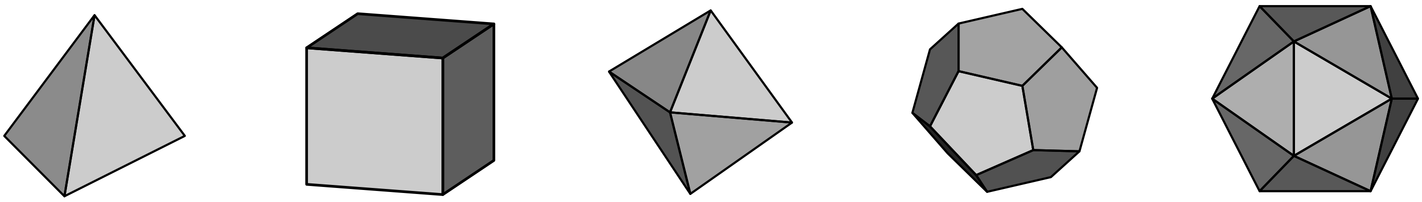
Задача 13. Пусть Γ — любой простой плоский граф. Докажите, что **а)** в графе Γ есть вершина степени меньше 6; **б)** вершины графа Γ можно раскрасить в 6 или менее цветов так, что никакие две вершины одного цвета не будут соединены ребром.

Задача 14. Можно ли разбить какой-нибудь шестиугольник на выпуклые шестиугольники так, чтобы выполнялось условие: границы любых двух из этих шестиугольников (включая исходный) либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону?

Задача 15. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют какие-то две ещё не соединённые точки отрезком так, чтобы отрезки не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Кто не может сделать ход — проиграл. Зависит ли исход от того, как играют соперники?

Задача 16. Докажите формулу Эйлера **а)** для произвольного связного графа с непересекающимися рёбрами, нарисованного на сфере; **б)** для произвольного выпуклого многогранника.

Задача 17. Дан выпуклый многогранник, грани которого являются n-угольниками, и в каждой вершине сходится k граней. Докажите, что $1/n + 1/k = 1/2 + 1/r$, где r — число его рёбер.



Задача 18. Выпуклый многогранник называют *правильным,* если все его грани — правильные n-угольники, и в каждой его вершине сходится k граней. Докажите, что любой такой многогранник — либо тетраэдр, либо куб, либо октаэдр, либо додекаэдр, либо икосаэдр (см. рис.).

1	2	3 а	3 б	4	5	6	7	8	9	10 а	10 б	11	12	13 а	13 б	14	15	16 а	16 б	17	18