Определение 1. *Граф* задан, если задано конечное множество его *вершин,* и для каждой пары разных вершин известно, связаны они *ребром* или нет. Граф удобно изображать как множество точек на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями (точки — вершины, линии — рёбра). Бывают и графы с *кратными* рёбрами (пара вершин может соединяться несколькими рёбрами) и *петлями* (вершина может соединяться сама с собой).

Задача 1. Шестеро человек сели за круглый стол так, что знакомы были только сидящие рядом и напротив. Затем они пересели на две лавочки так, что на одной лавочке были незнакомые люди, а на разных — знакомые. Каждый среди них знал троих, но среди любых трёх было хотя бы двое незнакомых. Могло ли такое быть?

Задача 2. **а)** Идёт Петя, а навстречу ему 5 человек. Докажите, что среди них найдутся либо трое, знакомых с Петей, либо трое, незнакомых с Петей. **б)** Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых человека. **в)** А если есть всего 5 человек?

Задача 3. На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые две из них цветным отрезком: красным, желтым или зелёным. Докажите, что найдутся три точки в вершинах одноцветного треугольника.

Задача 4. Выпишите в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы каждое число, составленное из любых двух соседних цифр, делилось на 7 или на 13.

Задача 5. В углах доски 3×3 стоят кони: 2 белых (в соседних углах) и 2 чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить их так, чтобы в любых двух соседних углах стояли кони разного цвета?

Задача 6. В стране 15 городов, каждый соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой напрямую или через один промежуточный город.

Задача 7. Группа островов соединена мостами. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту один раз. На острове Светлом он побывал трижды. Сколько мостов ведёт со Светлого, если турист **а)** не с него начал и не на нём закончил? **б)** с него начал, но не на нём закончил? **в)** с него начал и на нём закончил?

Задача 8. Из столицы выходит 101 авиалиния, из города Дальний — одна, а из остальных городов по 100. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Определение 2. *Степень* $\deg V$ вершины V — это число выходящих из неё рёбер (петли считаются дважды).

Задача 9. **а)** Как связаны сумма степеней вершин любого графа и количество его рёбер?
б) Верно ли, что число вершин нечётной степени любого графа чётно?

Задача 10. На какое наименьшее число частей надо разделить проволоку длиной 12 см, чтобы из них можно было сделать каркас куба со стороной 1 см? Полученные части можно изгибать и скреплять друг с другом.

Задача 11. У Пети 28 одноклассников, они имеют разное число друзей в классе. Сколько из них дружит с Петей?

Задача 12. **а)** На чаепитие собрались 25 школьников. Каждый принес по 2 пирожных. Все пирожные разложили на 25 тарелок (по 2 на тарелку). Докажите, что, как бы ни были размещены пирожные, можно так раздать тарелки школьникам, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.
б)* А если каждый принёс по 10 пирожных (и их разложили по 10 штук на тарелку)?

Определение 3. *Путь* в графе — это последовательность вершин V_1, V_2, …, V_{n+1} и соединяющих соседние вершины рёбер V_1V_2, V_2V_3, …, V_nV_{n+1}. Если $V_1 = V_{n+1}$, то путь называется *циклическим,* если при этом рёбра пути различны — *циклом,* а если ещё и вершины разные (кроме V_1 и V_{n+1}) — *простым циклом.*
Граф называется *связным,* если каждые две его вершины соединены путём.

Задача 13. (*Эйлеровы графы*) Дан связный граф, в котором степень любой вершины чётна. Докажите, что **а)** в графе есть простой цикл; **б)** рёбра графа можно разбить на несколько циклов (возможно, с общими вершинами, но без общих рёбер); **в)** условие равносильно тому, что в графе есть цикл, содержащий все рёбра.

Задача 14. В некой стране N городов, некоторые из которых соединены дорогами. Из любого города можно добраться в любой другой ровно одним способом (двигаясь по дорогам и нигде не разворачиваясь назад).
а) Докажите, что в стране есть город, из которого ведёт ровно одна дорога. **б)** Сколько дорог в этой стране?
в) Одну дорогу закрыли на ремонт. Можно ли теперь попасть из любого города в любой другой?

Определение 4. Граф называется *ориентированным,* если на каждом ребре указано направление.

Задача 15. В турнире каждая команда сыграла с каждой по разу. Ничьих не было. Всегда ли можно расположить команды в таком порядке, чтобы первая команда выиграла у второй, вторая — у третьей, и т. д.?

Задача 16. **а)** Строка из 36 нулей и единиц начинается с 5 нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найти 5 последних цифр строки. **б)*** Почему такая строка есть?

Задача 17. Каждый из 450 депутатов дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что из них можно выбрать 150 человек, среди которых никто никому не давал пощёчины.

Задача 18*. Схема проезда по городу представляет собой граф (ребра — улицы, вершины — перекрёстки). Назовём ребро AB *перешейком,* если любой путь, соединяющий A и B, содержит ребро AB. Докажите, что можно ввести на всех улицах, кроме перешейков, одностороннее движение (а на перешейках — двустороннее) так, чтобы от любого перекрёстка можно было доехать до любого другого, не нарушая правил.

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5	6	7 а	7 б	7 в	8	9 а	9 б	10	11	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в	14 а	14 б	14 в	15	16 а	16 б	17	18