**Определение 1.** Два отрезка называются *соизмеримыми,* если они имеют *общую меру* — третий отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз.

**Задача 1.** Верно ли, что два отрезка соизмеримы тогда и только тогда, когда найдётся третий отрезок, в котором каждый из двух укладывается целое число раз?

**Задача 2.** Докажите, что $a$ и $b$ соизмеримы в том и только том случае, когда $a$ и $a+2b$ соизмеримы.

**Задача 3.** От прямоугольника $a \times b$ отрезают квадраты со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, пока это возможно. С оставшимся прямоугольником делают тоже самое, и т. д.

**а)** Сколько и каких квадратов получится, если $a = 324$, $b = 141$?

**б)** Докажите: если $a$ и $b$ соизмеримы, то прямоугольник разрежут на конечное число квадратов;

**в)** Докажите, что если в итоге прямоугольник разрежут на конечное число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата является их общей мерой;

**г)** Докажите, что в пункте в) сторона последнего квадрата является *наибольшей* общей мерой сторон прямоугольника, и любая другая их общая мера укладывается в ней целое число раз.

**Задача 4.** От прямоугольника отрезали квадрат и получили прямоугольник, подобный исходному.

**а)** Соизмеримы ли его стороны? **б)** Найдите отношение сторон исходного прямоугольника.

**Задача 5.** Найдите наибольшую общую меру отрезков длиной $15/28$ и $6/35$.

**Определение 2.** *Наибольший общий делитель* $(a,b)$ целых чисел $a$ и $b$ — это наибольшее целое число, делящее и $a$ и $b$. Число $(a,b)$ существует и единственно, если $a$ и $b$ не равны одновременно нулю (докажите!).

**Задача 6.** Докажите, что $(a,b) = (a-b,b) = (r,b)$, где $r$ — остаток от деления $a$ на $b$.

**Задача 7.** Найдите возможные значения **а)** $(n,12)$; **б)** $(n,n+1)$; **в)** $(2n+3,7n+6)$; **г)** $(n^2,n+1)$.

**Задача 8.** На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размерами $a \times b$ клеток (стороны лежат на линиях сетки). На сколько частей делят его диагональ **а)** узлы сетки; **б)** линии сетки?

**Задача 9.** Даны целые числа $a > b > 0$. *Алгоритм Евклида* можно описать так: делим $a$ на $b$, получаем остаток $r_1 < b$, затем делим $b$ на $r_1$, получаем остаток $r_2 < r_1$, делим $r_1$ на $r_2$, получаем остаток $r_3 < r_2$, и т. д. Докажите, что какой-то остаток $r_{n-1}$ разделится нацело на $r_n$, и тогда $r_n = (a,b)$.

**Задача 10.** Найдите **а)** $(525,231)$; **б)** $(7\,777\,777, 7\,777)$; **в)** $(10946,17711)$; **г)*** $(2^m-1, 2^n-1)$.

**Задача 11.** Для каких пар чисел алгоритм Евклида работает «дольше всего» — каждый раз частное равно 1?

**Задача 12.** **а)** В обозначениях задачи 9 докажите, что каждое из чисел $r_1$, $r_2$, … представимо в виде $ax+by$ с целыми $x$ и $y$. **б)** Как с помощью алгоритма Евклида найти такие целые $x$ и $y$, что $ax+by=(a,b)$?

**Задача 13.** Докажите, что все общие делители целых чисел $a$ и $b$ — это все делители некоторого числа. Какого?

**Задача 14.** Какие расстояния можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) **а)** длины 6 см и 15 см; **б)** длины $a$ см и $b$ см (где $(a,b)=d$)?

**Задача 15.** Пусть целые числа $a$ и $b$ *взаимно просты* (то есть $(a,b)=1$). Докажите, что

**а)** найдутся такие целые $x$ и $y$, что $ax+by=1$; **б)** если число $c$ целое и $ac$ делится на $b$, то $c$ делится на $b$.

**Задача 16.** Решите в целых числах $x$, $y$ уравнения **а)** $12x=42y$; **б)** $ax+by=0$, где $(a,b)=d$.

**Задача 17.** **а)** Докажите, что уравнение $ax+by=c$ имеет решение в целых числах $x$, $y$ если и только если $c$ делится на $(a,b)$. **б)** Как найти одно из решений? **в)** Зная одно решение, найдите остальные.

**Задача 18.** Решите в целых $x$, $y$: **а)** $17x+23y=36$; **б)** $nx+(2n-1)y=3$, $n$ — целое; **в)** $525x-231y=42$.

**Задача 19.** Синим на числовой оси отметили числа, дающие при делении на 24 остаток 17, белым — дающие при делении на 40 остаток 7. Найдите наименьшее расстояние между белой и синей точками.

**Задача 20.** Решите в целых числах уравнение $2x+3y+5z=11$.

**Задача 21.** По окружности длины $a$ см катится колесо длины $b$ см ($a$ и $b$ натуральные, $(a,b)=d$). В колесо вбит гвоздь, он оставляет отметки на окружности. Сколько отметок оставит гвоздь?

**Задача 22.** На плоскости дана фигура, которая при повороте вокруг точки $O$ на угол $48^\circ$ переходит в себя. Обязательно ли эта фигура переходит в себя при повороте вокруг $O$ на угол **а)** $72^\circ$; **б)** $90^\circ$?

**Задача 23*.** Даны $m$ целых чисел. За один ход разрешается прибавить по единице к любым $n$ из них. При каких $m$ и $n$ всегда можно за несколько таких ходов сделать числа одинаковыми?

**Задача 24*.** Натуральные числа $m$ и $n$ взаимно просты. Дробь $(m+1000n)/(1000m+n)$ можно сократить на число $d$. Каково наибольшее возможное значение $d$?

**Задача 25*.** Натуральные числа $a$ и $b$ взаимно просты. Докажите, что уравнение $ax+by=c$

**а)** при любом целом $c$ имеет такое решение в целых числах $x$ и $y$, что $0 \leqslant x < b$;

**б)** имеет решение в целых неотрицательных числах $x$ и $y$, если $c$ целое, большее $ab-a-b$;

**в)** при целых $c$ от 0 до $ab-a-b$ ровно в половине случаев имеет целое неотрицательное решение, причём если для $c=c_0$ такое решение есть, то для $c=ab-a-b-c_0$ таких решений нет.

| 1 | 2 | 3 а | 3 б | 3 в | 3 г | 4 а | 4 б | 5 | 6 | 7 а | 7 б | 7 в | 7 г | 8 а | 8 б | 9 | 10 а | 10 б | 10 в | 10 г | 11 | 12 а | 12 б | 13 | 14 а | 14 б | 15 а | 15 б | 16 а | 16 б | 17 а | 17 б | 17 в | 18 а | 18 б | 18 в | 19 | 20 | 21 | 22 а | 22 б | 23 | 24 | 25 а | 25 б | 25 в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |