Задача 1. У кассы собралось $n+m$ покупателей; n имеют по купюре 100 руб, а другие m — по купюре 50 руб. В кассе денег нет, билет стоит 50 руб. Сколько есть способов размещения этих людей в очереди так, чтобы никто не ждал сдачи?

Задача 2. (*Метод траекторий*) Рассматриваем на клетчатой плоскости пути с началом и концом в узлах, состоящие из диагоналей клеток, где каждая диагональ идёт вправо вверх или вправо вниз (если двигаться по пути от начала к концу).

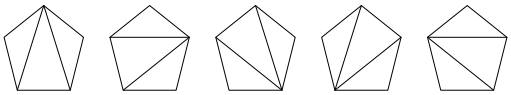
а) Сколько существует путей, выходящих из начала координат, в которых m диагоналей идут вправо вверх, а n диагоналей идут вправо вниз?

б) Сколько существует путей, соединяющих узел $(0,0)$ с узлом (s,t) (где $s,t \geqslant 0$)?

в) (*Принцип отражения*) Пусть узлы A и B лежат над осью абсцисс, B лежит правее A. Докажите, что число путей, идущих из A в B, которые касаются оси абсцисс или пересекают её, равно числу всех путей из A' в B, где A' — узел, симметричный A относительно оси абсцисс.

Задача 3. (*Теорема о баллотировке*) Кандидаты A и B собрали на выборах a и b голосов соответственно ($a > b$). Сколько существует способов последовательного подсчёта голосов, при которых A все время будет впереди B?

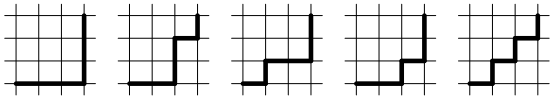
Задача 4. (*Числа Каталана*) **а)** Сколькими способами можно разрезать выпуклый $(n+2)$-угольник на n треугольников, проводя диагонали?



б) Сколькими способами можно правильно расставить в ряд n открывающих и n закрывающих скобок?

`a(b(cd))` `(ab)(cd)` `((ab)c)d` `a((bc)d)` `(a(bc))d`

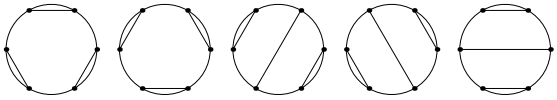
в) Сколько путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) идут по линиям клетчатой бумаги вверх и вправо, не поднимаясь выше прямой $y=x$?



г) Сколько существует последовательностей длины $2n$, в которых n раз встречается 1, n раз встречается -1, и все частичные суммы (то есть суммы нескольких (одного, двух, трёх, ...) первых членов) неотрицательны?

`1 1 1 -1 -1 -1` `1 1 -1 1 -1 -1` `1 -1 1 1 -1 -1` `1 -1 1 -1 1 -1` `1 1 -1 -1 1 -1`

д) На окружности даны $2n$ точек. Сколькими способами их можно соединить n непересекающимися хордами?



е) Найдите явную формулу для последовательности (c_n), заданной начальным условием $c_0 = 1$ и рекуррентной формулой $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0$ (при $n \geqslant 0$). Вычислите c_1, c_2, ..., c_5.

Определение. Пусть внутри круга выбрана точка O. *Началом* хорды AB относительно точки O (где AB не содержит O) назовём точку A, если в треугольнике OAB вершины расположены по часовой стрелке, иначе *началом* назовём точку B.

Задача 5. **а)** Найдите число областей, на которые делят круг n непересекающихся хорд.

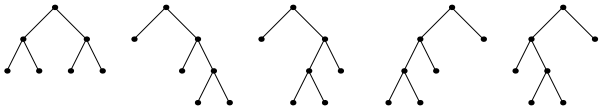
б) Пусть фиксированы $2n$ точек окружности. Соединим их n непересекающимися хордами. Затем выберем в одной из областей, на которые разделён круг, точку O и для каждой хорды отметим её начало относительно точки O. В результате получим набор n точек. Покажите, что любой набор n точек (из наших $2n$ точек) получается таким способом, причем ровно один раз. **в)** Получите ещё одно доказательство задачи 1 при $n=m$.

Задача 6. Найдите явные взаимно однозначные соответствия между множествами задач 4 а, б, в, г, д.

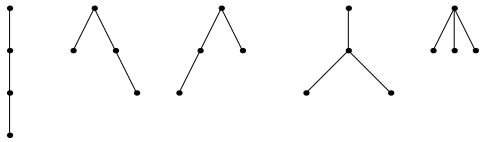
Задача 7. Докажите, что каждое из следующих множеств состоит из c_n элементов.

а) *Плоские корневые двоичные деревья* (у каждой вершины не более двух сыновей [«правый» или «левый»] и один предок [кроме корня, у которого нет предков]) с n вершинами

б) *Плоские корневые строго двоичные деревья* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листьями



в) *Плоские корневые деревья* с $n+1$ вершинами



1	2 а	2 б	2 в	3	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	4 е	5 а	5 б	5 в	6	7 а	7 б	7 в