Задача 1. В классе учатся 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать двоих школьников: старосту и ответственного за проездные билеты? А просто двоих школьников?

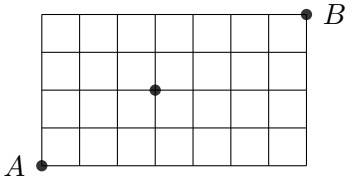
Задача 2. Сколько разных слов (не только осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах
а) РОК; **б)** КУРОК; **в)** КОЛОБОК; **г)** $\underbrace{\text{АА}\ldots\text{А}}_{a}\underbrace{\text{ББ}\ldots\text{Б}}_{b}$? **д)*** $\underbrace{\text{б}_1\ldots\text{б}_1}_{k_1}\underbrace{\text{б}_2\ldots\text{б}_2}_{k_2}\ldots\ldots\underbrace{\text{б}_m\ldots\text{б}_m}_{k_m}$.

Задача 3. **а)** Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных в классе из 20 человек?
б) А сколькими способами можно выбрать старосту, его помощника и трёх дежурных?

Определение 1. *Числом сочетаний из n элементов по k* называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. Обозначение: $\binom{n}{k}$ или C_n^k (читается «це из n по k»).

Задача 4. Докажите, что **а)** $C_n^k = C_n^{n-k}$; **б)** $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Задача 5. Найдите формулу для C_n^k.



Задача 6. **а)** На рисунке изображен план города (линии — улицы, пересечения линий — перекрестки). На улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько разных маршрутов ведёт из точки A в точку B?
б) Сколько из них не проходят через отмеченную на плане точку внутри города?

Задача 7. Сколькими способами можно рассадить класс, если пришло 27 человек, а мест 30?

Задача 8. Сколькими способами можно высадить в ряд 3 груши и 4 яблони?

Определение 2. *Треугольником Паскаля* называют числовой треугольник, изображенный на рисунке (по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

Задача 9. На рисунке справа выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Напишите следующие 5 строк.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      .   .   .   .   .   .
```

Задача 10. Докажите, что k-ое число n-ой строки равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Задача 11. Докажите, что сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля равна 2^n.

Задача 12. Докажите тождество: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

Задача 13. **а)** Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$.
б) (*Бином Ньютона*) Раскроем скобки и приведём подобные в выражении $(a+b)^n$. Возьмём любое слагаемое. Оно имеет вид $C \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ (почему?). Докажите, что $C = C_n^k$.

Задача 14. Докажите тождество: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 15. Возьмём любое число C в треугольнике Паскаля и сложим все числа, начиная с него и идя по прямой направо-вверх. Докажите, что сумма равна числу, стоящему под C справа.

Задача 16. Выведите из задачи 15 формулы для сумм $1 + \ldots + n$, $T_1 + \ldots + T_n$, $П_1 + \ldots + П_n$.

Задача 17*. Как из предыдущей задачи вывести формулы для $1^2 + \cdots + k^2$, $1^3 + \cdots + k^3$, $\ldots$?

Задача 18*. Отметьте в треугольнике Паскаля чётные числа. В каких строках все числа нечётные?

Задача 19*. Докажите, что $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \cdots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$.

Сочетания с повторениями

Задача 20. **а)** На полоске написано слово «снегопад». Сколькими способами ее можно разрезать на 5 частей? (Резать можно только между буквами.) **б)** Сколькими способами можно раздать 8 одинаковых конфет 5-ти разным школьникам так, чтобы каждый что-то получил? **в)** А если можно давать конфеты не всем?

Задача 21. Сколько букетов из пяти роз можно составить, если имеются розы трёх сортов?

Определение 3. *Числом сочетаний с повторениями из n элементов по k* называется число способов разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам. Обозначение: $\overline{C}_n^k$.

Задача 22. **а)** Докажите, что $\overline{C}_n^k = \overline{C}_{n-1}^k + \overline{C}_n^{k-1}$. **б)** Найдите формулу для $\overline{C}_n^k$.

Задача 23. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы
а) k натуральных слагаемых; **б)** k неотрицательных целых слагаемых; **в)** нескольких натуральных слагаемых? Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 24*. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых трёх цифр его шестизначного номера равна сумме трёх последних цифр его номера.
а) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько номеров с суммой цифр 27.
б) Сколько имеется последовательностей из 6 неотрицательных целых чисел с суммой 27?
в) Сколько существует счастливых билетов?

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7	8	9	10	11	12	13 а	13 б	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	20 в	21	22 а	22 б	23 а	23 б	23 в	24 а	24 б	24 в