Задача 1. Над цепью озер летела стая гусей. На каждом озере садилась половина гусей и еще пол гуся, а остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озерах. Сколько гусей было в стае?

Задача 2. В двух сосудах находится по 1 л воды. Из первого переливают половину имеющейся в нём воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нём воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нём воды во второй и т. д. Сколько воды будет в каждом сосуде после 100 переливаний?

Задача 3. В колонию из 50 чёрных бактерий попадает белая бактерия. Каждую секунду одна белая бактерия уничтожает одну чёрную, после чего все бактерии делятся надвое. Докажите, что рано или поздно все черные бактерии будут уничтожены. В какой момент это произойдет?

Задача 4. В числовой последовательности первый член равен 3^{1000}, а каждый следующий, начиная со второго, равен сумме цифр предыдущего. Докажите, что члены этой последовательности сначала уменьшаются, но, начиная с некоего члена, равны одному и тому же числу (какому?).

Задача 5. Тысяча ребят стоят по кругу и выбирают водящего. Они считаются так: первый остается в круге, следующий (по часовой стрелке) выходит из круга, следующий остается, следующий выходит, и т. д., через одного по кругу. Круг сужается, пока в нём не останется один человек. На каком месте он стоял сначала?

Задача 6. Бесконечную строку нулей и единиц 0110100110010110... составили так. Сначала написали нуль. Затем сделали бесконечное число шагов. На каждом шаге к уже написанному куску строки дописывали новый кусок той же длины, получаемый из него заменой всех нулей на единицы, а единиц — на нули. **а)** Какая цифра стоит в строке на 1000-м месте? **б)** Периодическая ли эта строка (начиная с какого-то места)?

Задача 7. На бесконечном листе клетчатой бумаги несколько (конечное число) клеток «заболели». Каждый час одновременно происходят такие изменения: если клетка больна, а две клетки, снизу и слева от неё, здоровы, то она выздоравливает; если клетка здорова, а две клетки, снизу и слева от неё, больны, то она заболевает (остальные клетки не меняются). Докажите, что как бы ни были расположены вначале больные клетки, через некоторое время все клетки будут здоровы.

Задача 8. **а)** На доске написаны натуральные числа x и y. Петя пишет на бумажку одно из этих чисел, а на доске уменьшает другое число на 1. С новыми двумя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и т.д., пока одно из чисел на доске не станет нулём. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на бумажке? **б)** Та же задача, но Петя повторяет такую операцию: когда на доске a и b, где $a \leqslant b$, он пишет на бумажку a^2, а затем заменяет числа на доске числами a и $b-a$. **в)** Каков геометрический смысл этих процессов?

Задача 9. Перед шеренгой из N солдат стоит капрал и командует: «Нале-ВО!». По команде часть солдат поворачиваются налево, остальные — направо. Затем каждую секунду каждые два солдата, стоящие лицом друг к другу, поворачиваются друг к другу затылками. Через сколько секунд движение заведомо прекратится?

Задача 10. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем всё повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток (если он есть) съедает. Орехов больше 3. Докажите, что **а)** хотя бы один орех будет съеден; **б)** не все орехи будут съедены.

Задача 11. По кругу стоят n корзин, в одной лежит яблоко, а остальные — пусты. За ход можно из любой непустой корзины забрать яблоко, а в две соседние с ней корзины добавить по яблоку (запас яблок очень большой). При каких n удастся сделать число яблок в корзинах одинаковым?

Задача 12. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка, в некоторые из них налито молоко. Один из гномов разливает все своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа, и т. д. После того, как последний (седьмой) гном разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

Задача 13. Дано несколько белых и чёрных точек, некоторые соединены отрезками. Назовём точку особой, если более половины соединённых с ней точек другого цвета. Если есть особые точки, выбирают любую из них и перекрашивают в противоположный цвет. Докажите, что в какой-то момент особых точек не останется.

Задача 14. Есть два больших сосуда. В одном — 1 л воды, в другом — 1 л 2%-го раствора соли. Можно переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой (и перемешивать). Удастся ли за несколько таких переливаний получить 1,5%-й раствор в сосуде, где вначале была вода?

Задача 15. На некоторых клетках доски 10×10 стоят фишки. За ход Петя одновременно ставит новые фишки на все пустые клетки, у которых хотя бы две соседние (по стороне) клетки заняты фишками. Он делает ходы, пока добавляются новые фишки. **а)** Приведите пример расстановки фишек, при которой Петя сделает более 40 ходов. **б)** Можно ли так расставить фишки, чтобы Петя сделал более 60 ходов? **в)** А более 64 ходов?

1	2	3	4	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	8 в	9	10 а	10 б	11	12	13	14	15 а	15 б	15 в