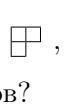
**Задача 1.** Рассмотрим последовательность «уголков»: □ ,  , , , , … Сколько клеток в $k$-том уголке и чему равна суммарная площадь первых $k$ уголков?

**Задача 2.** **а)** Чему равно $k$-е нечётное число и сумма первых $k$ нечётных чисел? **б)** Чему равно $k$-е чётное число и сумма первых $k$ чётных чисел? **в)** Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная с 179.

**Задача 3.** Числа $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, … греческий математик Диофант называл *треугольными*: □ , , , , … *Четырёхугольные числа* □ , , , , … — это квадраты.

**а)** Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
**б)** Что получится при сложении $T_n$ с $T_n$? **в)** Выразите $T_n$ через $n$ (и тем самым получите формулу для суммы $1 + 2 + 3 + \cdots + n$).

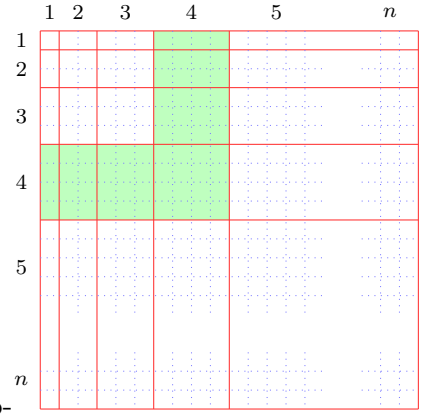



**Рис. 1.** Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до $n$

**Задача 4.** Найдите сумму первой сотни натуральных чисел.

**Задача 5.** Докажите геометрически: **а)** $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$;
**б)** $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2$.

**Задача 6.** (*Пифагорова таблица умножения*) **а)** Докажите тождество $mk = km$ (т. е. докажите, что $\underbrace{k + k + \ldots + k}_{m} = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{k}$).

**б)** Каковы размеры и площадь таблицы на рисунке 1?

**Задача 7.** **а)** Сколько клеток в $k$-м, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, «вершина» которого — квадрат $k \times k$ клеток, а стороны составлены из прямоугольников $1 \times k$, $2 \times k$, … , $(k-1) \times k$ клеток?
**б)** Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

**Задача 8.** Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление:
$3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, …

**Задача 9.** *Пятиугольные числа* $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, … показаны на рисунке 2. Найдите разность $P_k - P_{k-1}$ между последовательными пятиугольными числами. Выразите $P_n$ через $n$.

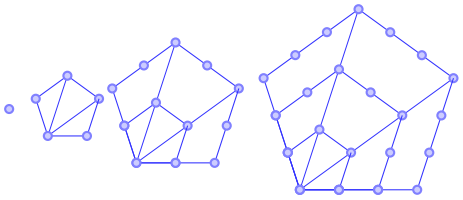


**Рис. 2.** Пятиугольные числа.

**Задача 10.** Докажите геометрически, что сумма $n$-го треугольного и $n$-го квадратного числа на $n$ больше, чем $n$-ое пятиугольное число.

**Задача 11*.** Число $k^2$ можно представлять себе как объём параллелепипеда $1 \times k \times k$, а сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ — как объём пирамиды, сложенной из таких параллелепипедов. Будем обозначать эту пирамиду $Sq(n)$ (на рисунке 3 изображена пирамида $Sq(2)$ объёмом $1^2 + 2^2$). Сложите из шести пирамид $Sq(n)$ параллелепипед. Каковы его размеры и объём? Выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

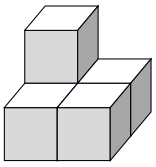


**Рис. 3.** Пирамида для $1^2 + 2^2$

**Задача 12.** На рисунке справа изображены несколько пирамид высоты 4, каждая из них состоит из $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ кубиков. **а)** Выберите одну из пирамид на рисунке и нарисуйте ее горизонтальные слои: нижний, второй снизу, …, верхний. **б)** Нарисуйте передний, второй спереди, …, задний слои выбранной пирамиды; **в)** Нарисуйте самый левый, второй слева, …, самый правый слои выбранной пирамиды. **г)** Сложите из шести пирамид такого вида параллелепипед. Каковы его размеры?

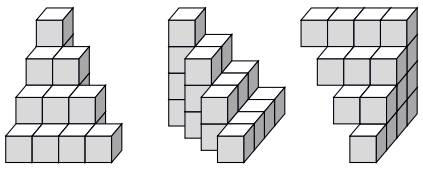
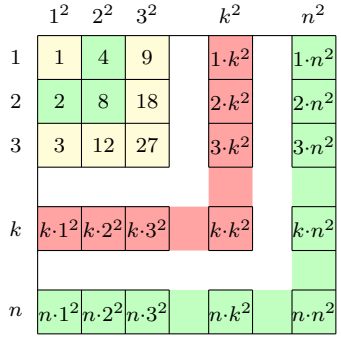


**Рис. 4.** Интересные пирамиды

**д)** Как сложить параллелепипед из шести пирамид аналогичного вида, но высоты $n$? Найдите формулу для суммы треугольных чисел $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ (эта сумма обозначается $\Pi_n$ и называется $n$-ым *пирамидальным числом*). **е)** Сложите из двух таких пирамид высоты $n$ и высоты $n-1$ пирамиду $Sq(n)$ и выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. **ж)** Докажите геометрически, что
$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$.




**Задача 13*.** Найдите сумму квадратов первых $n$ нечётных чисел.

**Задача 14*.** Найдите (каким-нибудь способом) формулу для суммы $\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_n$.

**Задача 15*.** На рисунке справа изображена таблица умножения чисел $1, 2, \ldots, n$ на числа $1^2, 2^2, \ldots, n^2$. **а)** Найдите сумму всех чисел в этой таблице. **б)** Найдите сумму чисел, стоящих в выделенном уголке (представьте в виде многочлена от $k$). **в)** Выведите формулу для суммы $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

Интересно, какие ещё суммы можно найти с помощью геометрических рассуждений?

| 1 | 2 а | 2 б | 2 в | 3 а | 3 б | 3 в | 4 | 5 а | 5 б | 6 а | 6 б | 7 а | 7 б | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 а | 12 б | 12 в | 12 г | 12 д | 12 е | 12 ж | 13 | 14 | 15 а | 15 б | 15 в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |